

Глава 4.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ

4.1. ОПИСАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Принцип описаний. Время — неумолимый движитель, без усталости бежит-бежит. В этом безостановочном беге и возникают события, названные случайными на том основании, что факт их появления или не появления не прогнозируется абсолютно точно. Но время дает нам еще одно проявление случайности: можно достоверно знать, что событие произойдет, но не знать момента возникновения, и событие становится случайным по времени, т. е. случайным процессом. Вообще любые случайные или неслучайные события, если учесть их положение во времени, образуют процесс. А удобна ли такая абсолютизация случайных процессов?

Наша цель — построение математических моделей — обязывает не усложнять, а упрощать. Введение времени как самостоятельного параметра оправдано при следующих обстоятельствах. Во-первых, если важным представляется момент появления со-

бытия, например в радиолокации, где запаздывание отраженного импульса несет сведения о расстоянии до цели. Во-вторых, при описании физических явлений, связность и естественность хода развития которых без времени проследить немыслимо, таких как рост агрокультуры, технологические процессы, сигналы динамической системы, шумы, помехи и так далее.

Процессы в природе могут быть самыми разнообразными: дробовые и атмосферные шумы, транспортные и промышленные, импульсные и гармонические помехи, всевозможные потоки в системах массового обслуживания и др. Задачей исследователя ставится разработка как можно более экономных и простых описаний, достигаемых выявлением наиболее существенных, важных сторон, своего рода «анкетных данных» процессов с последующим облачением этих данных в «тогу» первичных средних.

Собственно, в самой уже модели за счет выбора первичных признаков заключена потенциальная возможность к упрощениям, направленным редукциям, и чем экономнее модель, меньшим числом данных она задается, тем проще процесс в нашем представлении, т. е. в том виде, как нам удобно с ним иметь дело. Это принципиальное положение теории. И переход к дискретному времени тогда естествен как одна из разновидностей редукции.

Реализации и признаки. Формально *случайным процессом* (или просто процессом) называется система случайных величин X_t , $t \in T$, индексированная числовым параметром t — текущим временем. Здесь T — множество значений t , в частности, это отрезок $[0, T]$ числовой прямой, а в пределе — полупрямая $\mathcal{R}^+$ или вся числовая ось $\mathcal{R}$. Если t — векторный параметр, например $t = (t, z_1, z_2, z_3)$ — время и три координаты пространства, то X_t называется *полем*, наше изложение распространяется и на него. Наконец, если T — дискретный набор временных отсчетов: $T = \{t_1, \dots, t_n\}$, то процесс вырождается в случайную последовательность, а при $n=1$ — в случайную величину. Переход к последовательности связывает процесс с исследованием предыдущей главы, хотя сейчас нас в основном будет интересовать непрерывное время t .

Пространством элементарных событий, соответствующим процессу X_t , $t \in T$, в общем, является множество всех возможных реализаций x_t , $t \in T$ (функций времени). Множество $\mathcal{X}$ реализаций, имеющее единичную вероятность $P(\mathcal{X})=1$, называется *достоверным* для данного процесса. Все реализации, не принадлежащие $\mathcal{X}$, оказываются невозможными.

Если T есть интервал прямой (либо вся прямая), а достоверным является множество $\mathcal{X}$ непрерывных реализаций, то процесс будет непрерывным. Если это множество дифференцируемых реализаций, то и процесс будет дифференцируемым, если ограниченных (т. е. $|x_t| \leq a$), то — ограниченным и т. д. Таким образом, некоторое свойство всех реализаций будет достоверным свойством процесса, т. е. выполняющимся с вероятностью 1.

По нашему мнению, для реальных, физически, так сказать, осязаемых моделей каждая возможная реализация должна иметь ненулевую верхнюю вероятность $\bar{P}(X_t = x_t) > 0$, $x_t \in \mathcal{X}$. Так и будет получаться, если первичных данных о процессе конечное число и они не абсолютно точны, т. е. в известном смысле размыты.

Для нужд теории, несмотря на сказанное, нельзя исключать и тот крайний вариант, когда вероятности всех отдельных реализаций нулевые, понимая его как предельный или идеальный, соответствующий неограниченному набору данных. В этом варианте достоверное множество реализаций $\mathcal{X}$ может не быть определенным однозначно (эквивалентно неоднозначности нулевого множества). В самом деле, если $\mathcal{X}_k$, $k=1, 2, \dots$, — разные варианты $\mathcal{X}$, то их конечные пересечения обязательно будут достоверными, но никак не счетными, так как пересечение всех $\mathcal{X}_k$ не приводит к достоверному множеству, а значит, минимальное из них не существует (эквивалентно тому, что объединение счетного числа нулевых множеств не ведет к нулевому множеству).

Любое множество реализаций, включающее хотя бы один какой-нибудь вариант $\mathcal{X}$, будет достоверным. Не всегда $\mathcal{X}$ нужно стремиться сделать как можно уже, но желательно, чтобы оно было как можно проще (даже за счет некоторого его расширения).

Прежде чем подойти к описанию процессов, напомним общую конструкцию интервальных моделей. Она остается единообразной для любых случайных объектов, будь то случайные величины, последовательности, процессы, наконец, поля, и состоит из трех шагов: 1) анализируется структура признаков с взаимной их полуупорядоченностью; 2) выделяются первичные, на которых задаются первичные средние; 3) первичные средние продолжают на все остальные признаки, образуя модель. Сложность модели будет определяться числом первичных признаков и, конечно, их структурой, а «подводными камнями» будет размерность пространства $\mathcal{X}$ и связанные с ней трудности контроля упорядочения признаков, о которых пойдет речь ниже.

Обратимся к случайным процессам. Их признаками будут всевозможные функционалы $f\{X_t\}$, ставящие в соответствие каждой реализации x_t одно число. Примерами таковых для процесса с непрерывным временем являются линейные признаки, к которым относятся, во-первых, интегралы

$$f_h\{X_t\} = \int_T X_t h_t dt,$$

где h_t — весовая функция; во-вторых, «выхватывание» из процесса одного отсчета $f_\tau\{X_t\} = X_\tau$, соответствующего моменту τ (может быть получен из интеграла при h_t в виде дельта-функции Дирака); в-третьих, взятие первой производной $f\{X_t\} = dX_t/dt$ (если реализации процесса дифференцируемы), второй производной и т. д.

$$f_{H\{X_t\}} = \iint_{T \times T} X_t X_\tau H_{t, \tau} dt d\tau.$$

Индикаторные признаки есть индикаторные функции событий $\{X_t \geq a\}$, $\{a_1 < X_t < a_2\}$, состоящих в превышении или невыпадении процессом уровней; сюда же относятся произведения индикаторных функций: $\{X_t \geq a, \forall t \in T_1\}$, указывающие на одно-временное превышение уровня a всеми значениями процесса из подмножества T_1 временной оси.

Гибридные признаки вовлекают разные классы предыдущих, как, например, линейно-индикаторный $\{\int_T X_t h_t dt > a\}$, состоящий в фиксации превышения линейным признаком уровня a с формулировкой результата в виде 0 (нет) и 1 (да).

Гармонические признаки даются произведениями

$$\prod_i \frac{\sin}{\cos} (u_i X_{t_i})$$

и связываются с предельными теоремами предыдущей главы.

Вообще, признаков неисчислимо множество, а то, что здесь указано, лишь узкие их подклассы. Разберем упорядочение признаков как внутри подклассов, так и между ними. Для линейных признаков имеем $f_h \geq f_{h^*} \Leftrightarrow h_t \geq h_t^*, \forall t \in T$. Для квадратичных $f_h \geq f_{h^*} \Leftrightarrow H_{t,\tau} - H_{t,\tau}^* -$ неотрицательно определенное ядро. Линейные превращаются в квадратичные посредством возведения f_h в квадрат: $f_h^2 = \iint_T X_t X_\tau \cdot h_t h_\tau dt d\tau$ с $H_{t,\tau} = h_t h_\tau$, в результате чего $f_h^2 \geq f_{h^*}^2$ эквивалентно неотрицательной определенности $h_t h_\tau - H_{t,\tau}^*$. Связь линейных и квадратичных с индикаторными признаками осуществляется через мажорирование индикаторных функций параболлами, и наоборот. Так как $\{|x| \leq a\} \geq c_0 - c_1^+ x^2$ при $c_0 \leq 1, c_1^+ \geq c_0/a^2$, то сдвигом по оси абсцисс получаем неравенство:

$$\{a_1 \leq X_t \leq a_2\} \geq c_0 - c_1^+ \left(X_t - \frac{a_2 + a_1}{2} \right)^2$$

$$\text{при } c_0 \leq 1, c_1^+ \geq \frac{4c_0}{(a_2 - a_1)^2},$$

где в левой части стоит индикаторный признак, а в правой — вложенная в индикаторный прямоугольник парабола. Помещая параболу сверху, получаем

$$\{X_t > a_2\} \leq c_1^+ \left(X_t - \frac{a_2 + a_1}{2} \right)^2, \forall a_1 < a_2, c_1^+ \geq 4/(a_2 - a_1)^2.$$

Кстати, взяв среднее от обеих частей, придем к неравенству Чебышева (см. § 3.1).

Модель процесса. В формальном определении модель процесса есть совокупность согласованных средних $\bar{M}f$ на классе $\mathcal{F}$ функционалов-признаков, составляющих область существования верхних средних. В $\mathcal{F}$ входят, по крайней мере, все ограниченные функционалы. Но могут включаться и неограниченные, скажем, линейные и квадратичные. Это будет совершенно законно, если процесс ограничен, а если нет, то будет некоторый волюн-

таризм, но оправданный энергетической конечностью реальных физических процессов, а также практической невозможностью (даже в смысле измерить) сколь угодно больших его значений. К этому вернемся в конце раздела.

По способу задания модель согласно общей нашей конструкции порождается любым непротиворечивым набором первичных средних $\bar{M}g, g \in \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ — выделенная совокупность первичных признаков-функционалов. В частности, первичными будут вероятности, если $\mathcal{G}$ составляют индикаторные признаки.

Конечно же, по первичным средним вовсе не обязательно искать все $\bar{M}f$, а нужно удовлетвориться мыслью, что они существуют и в случае нужды вычислимы конструктивным путем, даваемым формулой согласования и продолжения (1.2).

При движении к основной цели: научиться экономно описывать первичными средними знакомые и наиболее характерные типовые черты и свойства процессов, полезно придать этим средним прикладную интерпретацию. Вот некоторые из примеров:

текущее среднее значение процесса: $\bar{m}_t = \bar{M}X_t$;

среднее интегральное значение: $\bar{M} \int X_t dt$;

текущая средняя мощность $\bar{r}_t = \bar{M}X_t^2$;

интегральная средняя мощность: $\bar{M} \int X_t^2 dt$;

текущие начальные моменты: $\bar{M}X_t^k$;

корреляционные функции: $\bar{r}(t, \tau) = \bar{M}X_t X_\tau$;

вероятности превышений: $\bar{P}(X_t > a)$;

совместные вероятности: $\bar{P}(a_1 \leq X_t \leq a_2, \forall t \in T_1)$.

Здесь черта над и под буквами предохраняет от повтора, означая, что соответствующее выражение верно отдельно как для нижнего, так и для верхнего средних.

В отличие от $\bar{M}X_t$ и $\bar{M}X_t$, которые равноправны, между нижним и верхним средними других признаков имеется большая разница. Нижнее среднеквадратическое значение $\bar{r}_t$ указывает на ту границу, ниже которой ни при каких условиях не может упасть среднеквадратическая мощность процесса, а $\bar{r}_t$ — выше чего она никогда не сможет подняться. То же самое относится к вероятностям. Таким образом, $\bar{r}_t, \bar{M}, \bar{P}$ служат для описания необходимых, обязательно присутствующих статистических свойств процесса, а в свою очередь, $\bar{r}_t$ и $\bar{M}, \bar{P}$ — возможных, не исключенных, не обязательных.

Любое из приведенных нами средних, — а ими, конечно же, не исчерпывается необозримое богатство выбора, — может быть включено в набор первичных; все зависит от того, какие среднестатистические данные о процессе доступны или могут быть из многообразия доступных разумно выделены для формирования математической модели. Например, если измерения значений процесса производятся с помощью инерционных технических средств,

выдающих на выход не значения самого процесса, а лишь интегральные его данные на отрезках $[i\Delta t, (i+1)\Delta t]$, то все первичные признаки будут иметь вид $g(Y_i)$, где $Y_i = \int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t} X_t dt$. Если

принципиальными для процесса мы считаем выбросы, то целесообразно в первичные включать вероятности превышений, тогда ими и будет характеризоваться выделенная нами черта процесса. Если доступным для наблюдений является не вся, а часть T_1 временной оси, то признаками будут функционалы от $X_t, t \in T_1$, инвариантные к поведению реализаций вне T_1 . О характерных признаках подробнее поговорим в следующем разделе. А сейчас продемонстрируем процедуру продолжения первичных средних на остальные признаки.

Пример 4.1. Пусть X_t имеет достоверным некоторое множество реализаций $\mathcal{X}$ и задан своими точными первичными значениями текущего среднего $MX_t = m_t, t \in T$. Ничего, кроме этого, о нем не известно. Формулой продолжения средних будет

$$\overline{Mf}\{X_t\} = \inf \{[c_0 + \sum c_i m_{t_i}] : f\{x_t\} \leq c_0 + \sum c_i x_{t_i}\},$$

где неравенство на поиск инфимума должно выполнять при всех ограниченных реализациях x_t , а инфимум определяется выбором дискретов t_i и коэффициентов c_i конечных сумм. Из данной формулы получаем $M(c_0 + \sum c_i X_{t_i}) = c_0 + \sum c_i MX_{t_i}$, т. е. оператор среднего, будучи точным, проносится за знак конечных сумм. По формуле продолжения могут быть найдены средние лишь от функционалов, представляемых в виде $f\{x_t\} = f_0\{x_t\} + \sum c_i X_{t_i}$, где функционал $f_0\{x_t\}$ равномерно ограничен на $\mathcal{X}$; они-то и образуют область существования $\mathcal{F}$ средних и для них:

$$\overline{Mf}\{X_t\} = \sup_{x_t \in \mathcal{X}} f_0\{x_t\} + \sum c_i m_{t_i}.$$

Если теперь текущее среднее не является точным, а задается интервалами $\underline{m}_t, \bar{m}_t$, то все формулы остаются в силе с той лишь разницей, что $c_i m_{t_i}$ заменяются на $c_i \bar{m}_{t_i}$ при $c_i \geq 0$ и на $c_i \underline{m}_{t_i}$ при $c_i \leq 0$.

Рассмотрим упрощения на пути построения модели. Какова бы ни была исходная модель, любой процесс можно «подвести основанием» под фиксированный набор признаков $\mathcal{H}$, вычислив для этого $Mh, h \in \mathcal{H}$ и взяв их за первичные для новой модели. Это соответствует $\mathcal{H}$ -расширению модели $\mathcal{M}$ и позволяет соответствующим выбором $\mathcal{H}$ упростить описание процесса, представить его в типовом виде.

Уже отмечалось, что вид первичного набора открывает возможность редукции самого процесса. Так, если первичными являются функционалы $g\{X_t\} = g\{X\}$, зависящие лишь от отсчетов $X = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ процесса в дискретные моменты, то переход от X_t к вектору X , называемый *дискретизацией процесса*, будет преобразованием подобия (см. § 2.1). Здесь этот переход, по сути

4

дела, не меняет данных о модели. А поскольку к указанному виду первичных функционалов могут расширением быть приведены любые модели, то дискретизация, в общем, есть не что иное в смысле теории, как упрощающее расширение модели процесса. То же может быть сказано относительно *квантования*, состоящего в приведении значений процесса к заранее выбранным уровням.

Итак, любые преобразования процесса влекут за собой расширения его модели, кроме преобразований подобия, так как они сохраняют все известные свойства процесса.

Характерные черты процессов. Первый и прямой путь задания процессов состоит в выделении характерных статистических свойств и облачения их в форму первичных средних. Для этого может быть выделено, в общем, любое их число. При этом удачным считается наш выбор только тогда, когда без серьезного расширения тела модели меньшим оказывается число первичных значений, так как в результате будет проще модель. Поймать в чертах процесса наиболее важное, отличительное и воплотить в модель — есть искусство обладания математическим языком на базе инженерной интуиции.

Рассмотрим некоторые типовые свойства. Сведения об ограниченности процесса по абсолютной величине числом a формулируются как $\bar{P}(|X_t| > a) = 0$. При t , пробегающим T , это даст не одно, а целый набор первичных значений.

Инерционность процесса в смысле невозможности быстрых его изменений описывается ограничениями на производную процесса в обычном или среднеквадратическом смысле: $\bar{P}(|dX_t/dt| > a) = 0$; $\bar{M}(dX_t/dt)^2 = c$. Это определит локальные свойства реализаций. Глобальный же характер их изменений отражается видом границ корреляционных функций $r(t, \tau)$, $\bar{r}(t, \tau)$. Отметим, что при несовпадении нижней и верхней границ корреляций свойства непрерывности ими не определяются. Тогда непрерывность процесса воплощается, например, в способность средних вида $\bar{M}(X_t - X_\tau)^2$ сходиться к 0 при $\tau \rightarrow t$. Возможны другие средства описания непрерывности, например ограниченностью производной.

Глобально (и достаточно грубо) изменчивость процесса определяется *интервалом корреляции* $\tau_{\text{кор}}$ — минимальным числом таким, что $|\bar{M}|X_t X_{t+\tau}| = 0$ при $\tau > \tau_{\text{кор}}$. Охарактеризовать максимально допустимую интенсивность выбросов процесса выше уровня a помогают первичные значения $\bar{P}(|X_t| > a)$, тогда как гарантированная доля вероятностей этих выбросов эквивалентна нулевой нижней границе $\underline{P}(|X_t| > a)$. Причем на основании неравенства Чебышева верхняя вероятность превышений для ее согласованности со значениями $\bar{M}X_t^2$ не может быть выше $\bar{M}X_t^2/a^2$, иначе при согласовании она должна замениться на это более точное значение. Нижняя же вероятность превышения автономна, так что если вдруг она окажется больше $\bar{M}X_t^2/a^2$, то это никак на саму нее не повлияет, зато при согласовании приведет к уточ-

нению $\overline{MX}_t^2$, а именно, к росту до значения $\overline{MX}_t^2 = a^2 P(|X_t| > a)$. Рассмотрим, как можно задать конкретный процесс.

Пример 4.2. Задание импульсной помехи. Особенность рассматриваемого процесса — наличие на оси времени хаотических импульсов разной, в общем, амплитуды, формы и продолжительности. Отсюда основная черта — это редкость ненулевых значений процесса. Поэтому первичными нужно сделать вероятности $P(X_t \neq 0) = q$, $\bar{P}(X_t \neq 0) = \bar{q}$. Отрезок $[q, \bar{q}]$ указывает на вероятности присутствия в момент t импульса (ненулевого значения) процесса, а конечная его ширина — на незнание этой вероятности или же на неустойчивость процесса. При $q = 0$ не исключается, что импульсов вовсе не будет, а $q > 0$ гарантирует обязательную долю вероятности их присутствия. Значение же $\bar{q}$ задает максимально допустимую их концентрацию.

Дополнительно к $q, \bar{q}$ более детальный характер превышений мог бы быть отражен вероятностями $P(|X_t| > a)$ и $\bar{P}(|X_t| > a)$.

Дробление процесса на составляющие. Исследуем одну полезную интерпретацию процессов, вытекающую из теоремы 1.3 о представлении.

Назовем процесс $\mathcal{G}'$ -простым, если модель его есть $\langle M\mathcal{G}' \rangle$ и задается точными на наборе $\mathcal{G}'$ функционалов первичными средними Mg , $g \in \mathcal{G}'$. Согласно теореме 1.3 о представлении модель любого процесса с первичным набором $\mathcal{G}$ признаков записывается как объединение $\mathcal{G}'$ -простых составляющих моделей при $\mathcal{G}'$ более подробном, чем $\mathcal{G}$:

$$\langle \tilde{M} \rangle = \mathcal{M} = \bigvee_{\langle M\mathcal{G}' \rangle \subset \mathcal{M}} \langle M \rangle, \quad \mathcal{L} + \mathcal{G}' \supset \mathcal{G}.$$

Чем шире $\mathcal{G}'$, тем из более «мелких частиц» складывается модель процесса. Наиболее экономно считать $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$.

Иногда удобнее вместо «модель» говорить «процесс», а объединение интерпретировать как семейство простых процессов. Тогда рассматриваемое представление позволяет вообразить себе X_t так, как будто бы вместо него действует любой из этих $\mathcal{G}'$ -простых составляющих процессов, но неизвестно какой.

В более общем представлении модели имеем: $\mathcal{M} = \bigvee_{\theta} \mathcal{M}_{\theta}$, где θ — неизвестный (задающий) параметр.

Функциональные представления. Даются записью $X_t = V_{\theta}\{\xi_t\}$, определяющей X_t посредством преобразования «стандартного» процесса ξ_t и неизвестного произвольного параметра θ . Оператор V_{θ} включает те действия, какие нужно проделать с ξ_t для получения X_t , а в θ вкладывается неизвестная часть этих действий.

Для последовательности (дискретного времени t) примеры функциональной записи были рассмотрены в конце § 3.1. Они обобщаются на процессы. Одним из них является линейное представление:

$$X_t = \int h(t, \tau) \xi_{\tau} d\tau.$$

При подробном описании ξ_t импульсный отклик $h(t, \tau)$ фильтра может играть роль носителя априорного дефицита θ , разрушителя подробности. К примерам линейных представлений процесса относится запись в виде решения дифференциального уравнения $c_k d^k X_t / dt^k + \dots + c_1 dX_t / dt + c_0 X_t + c = \xi_t$.

Для процесса на выходе канала связи с замираниями характерно мультипликативное представление: $X_t = \theta^+_t \xi_t$, где ξ_t — процесс с установленными свойствами и, главное, с точным значением $M\xi_t^2 = 1$, $\forall t$, а $\theta^+_t \geq 0$ — параметр замираний. В зависимости от того, быстрыми или медленными являются замирания, ставятся корреляционные свойства θ^+_t . Размах между максимальным и минимальным значениями θ^+_t характеризует глубину замираний, а разность $\overline{M}(\theta^+_t)^2 - \underline{M}(\theta^+_t)^2 = \overline{MX}_t^2 - \underline{MX}_t^2$ — неточное знание мощности процесса X_t . Что касается связи процессов θ^+_t с ξ_t , то часто они независимы. Но может θ^+_t быть свободным от ξ_t , последнее оправдано физической возможностью влияния значений ξ_t на θ^+_t , когда ξ_t есть передаваемый по каналу сигнал, а X_t — то, что получилось в канале с учетом замираний. В этом варианте θ_t может зависеть от ξ_t , а точнее, подстраиваться под него непредсказуемым образом. Обратное проблематично.

Аддитивное представление: $X_t = \theta_t + \xi_t$, $M\xi_t = 0$, позволяет развязать медленно меняющуюся составляющую θ_t от быстро флуктуирующей ξ_t , и плюс к этому — явно выделить в виде ξ_t ту часть процесса, о которой статистические данные имеются, от той θ_t , о которой кроме множества Θ возможных реализаций ничего не дано.

Различные аддитивные представления. Функциональные представления, в общем, ограничены по своим возможностям ввиду детерминизма их связей. Не всегда удастся подобрать такие V, θ и ξ , чтобы получить требуемые свойства X_t , да и итог может оказаться настолько сложным, что станет ненужным. Облегчения можно достичь заменой равенства на включение: $X_t \subset V_{\theta}\{\xi_t\}$, означающее, что ИМ правой части включает ИМ левой, т. е. правая часть воссоздает расширенную модель исключением некоторых сторон процесса X_t (желательно наименее важных). Будем это включение рассматривать применительно к аддитивному представлению.

Поставим вопрос, всякий ли процесс X_t можно записать как аддитивную смесь $m_t + \xi_t$ среднего его значения m_t и добавки ξ_t с нулевым средним $M\xi_t = 0$? Оказывается, и мы сейчас это покажем, что нет, если иметь в виду равенство, и да — если включение, т. е. расширенное представление.

Рассмотрим произвольный процесс X_t , заданный моделью $\mathcal{M}$. Любое $\langle m_t = MX_t \rangle$ -сечение модели

$$\mathcal{M}_{m_t} = \mathcal{M} \bigwedge_t \langle MX_t = m_t \rangle$$

соответствует допущению, что среднее процесса известно точно.

Каждому m_t -сечению соответствует то же достоверное множество реализаций, что и самому процессу. Если $\mathcal{M}_{m_t}$ непусто, то реализация m_t среднего называется *собственной*. Множество

$$\mathfrak{W} = \{m_t: \mathcal{M}_{m_t} \neq \emptyset\}$$

называется *собственным семейством средних*.

Поскольку модель любого процесса представляется объединением ее сечений, имеем:

$$\mathcal{M} = \bigvee_{m_t \in \mathfrak{W}} \mathcal{M}_{m_t},$$

$$\overline{M}f\{X_t\} = \sup_{m_t \in \mathfrak{W}} \overline{M}_{m_t}f\{X_{t,m}\},$$

где нижняя формула — суть расшифровка объединения в верхней, а процесс $X_{t,m}$ соответствует сечению $\mathcal{M}_{m_t}$. Собственное семейство средних задает так называемые *свойства первого порядка* процесса. На основании этого семейства могут быть рассчитаны верхние (и нижние) средние конечных линейных комбинаций отсчетов процесса:

$$\overline{M} \sum c_i X_{t_i} = \sup_{m_t \in \mathfrak{W}} \sum c_i m_{t_i}.$$

Рассмотрим теперь возможность представления процесса X_t в виде суммы среднего и остатка. Если среднее m_t является точным, то собственное семейство $\mathfrak{W} = \{m_t\}$ состоит всего из одной реализации m_t и очевидной становится запись: $X_t = m_t + \xi_t$, $M\xi_t = 0$, где $\xi_t = X_t - m_t$ есть процесс, определенный через X_t значениями $\overline{M}f\{\xi_t\} = \overline{M}f\{X_t - m_t\}$, $\forall f \in \mathcal{F}$. Если X_t задан своими первичными средними $\overline{M}g\{X_t\}$, $g \in \mathcal{G}$, то первичными средними для ξ_t будут $\overline{M}g\{\xi_t + m_t\}$, $g \in \mathcal{G}$, и они получаются смещением на m_t функционалов g . Символьно это записывается $\mathcal{M}^{\xi+m} = \mathcal{M}^x$ или $\mathcal{M}^{\xi} = \mathcal{M}^{x-m}$, $m = \{m_t, t \in T\}$.

Пусть теперь $MX_t = m_t$ не является точным. Аналогом предыдущего будет так называемое подчиненно-аддитивное представление, согласно которому аддитивная запись верна для каждого MX_t -сечения $\mathcal{M}_m$ исходной модели $\mathcal{M}$:

$$\begin{aligned} X_{t,m} &= m_t + \xi_{t,m}, \\ M_m \xi_{t,m} &= 0, m_t \in \mathfrak{W}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где процесс $\xi_{t,m}$ определяется моделью $\mathcal{M}_m^{\xi_{t,m}} = \mathcal{M}_m^{x-m}$ и имеет при каждом m_t нулевое среднее. В этом представлении первое слагаемое m_t при неточном его значении «вбирает» в себя статистически неустойчивую составляющую среднего процесса, а все имеющиеся статистические данные о X_t переносятся в остаток. Процесс X_t же сам складывается из семейства составляющих его $X_{t,m}$ при m_t , пробегающим множество $\mathfrak{W}$.

Некоторым неудобством подчиненно-аддитивного представления является то, что остаток $\xi_{t,m}$, в общем, будет зависеть от значения m_t . Чтобы освободиться от этой зависимости, заменим $\xi_{t,m}$ на более широкий (в смысле модели) процесс $\xi_t \supset \xi_{t,m}$, определенный объединением:

$$\mathcal{M}^{\xi} = \bigvee_{m \in \mathfrak{W}} \mathcal{M}_m^{\xi_{t,m}}.$$

Сказанное наводит на следующее расширенное аддитивное представление произвольного процесса:

$$X_t \subseteq m_t + \xi_t, m_t \in \mathfrak{W}, M\xi_t = 0, \quad (4.2)$$

где m_t принимает произвольные значения из семейства $\mathfrak{W}$, а процесс ξ_t свободен от m_t . Символ $\subseteq$ означает, что расширение, стоящее в правой части (4.2), однозначно определено и является минимальным расширением подобного рода, включающим X_t .

Смысл перехода от (4.1) к (4.2) состоит в том, что «забываются» связи между остатком $\xi_{t,m} = X_{t,m} - m_t$ и средним m_t , приводя к расширению ξ_t по сравнению с $\xi_{t,m}$, как это записано в (4.2). Опасно только, не станет ли это расширение чрезмерным. Например, если ξ_t в результате расширения окажется голым процессом, то включение (4.2) становится тривиальным. Такая опасность иллюстрируется примером.

Пример 4.3. Сугубо ограниченный процесс. Пусть процесс X_t определен первичными вероятностями $\bar{P}(|X_t| \geq a) = 0, \forall t$. Это есть процесс, о котором известно только, что в любой момент он ограничен по модулю значением a . Для такого процесса $\underline{M}X_t = -a, \overline{M}X_t = a$ и собственное семейство $\mathfrak{W}$ средних образуют всевозможные реализации, заключенные между значениями $-a, a$. В представлении (4.2) здесь будет $\xi_t \equiv 0$, так как нельзя из такого процесса выделить случайную составляющую с $M\xi_t = 0$.

При замене включения (4.2) на равенство, что будет, когда все $\xi_{t,m}$ от m_t не зависят, т. е. $\xi_{t,m} = \xi_t, \forall m$, приходим к свободно-аддитивному представлению процесса с неизвестным средним:

$$X_t = m_t + \xi_t, m_t \in \mathfrak{W}, M\xi_t = 0,$$

где ξ_t считается свободным от m_t . Его чаще будем просто называть аддитивным. Не всякий процесс допускает такое представление, а лишь тот, для которого m_t -сечения модели одинаковы между собой за вычетом m_t .

Дополнения. 1. Точное распределение вероятностей процесса. Абсолютно точное распределение процесса $X_t, t \in T$, может быть лишь в случае, если T дискретно и X_t при каждом $t \in T$ принимает дискретные значения. Если это не так, то нужен остов в виде алгебры $\mathcal{A}_t$, на событиях которых задаются точные совместные вероятности $P(A_{t_1}, A_{t_2}, \dots, A_{t_n}), A_{t_i} \in \mathcal{A}_{t_i}$ где $t_1, t_2, \dots, t_n$ — произвольные выборки отсчетов из T . Корректность вероятностей и вместе с тем их согласованность эквивалентна конечной адди-

тивности. Тогда вероятности, взятые в качестве первичных, и определяют процесс с точным на пересечении $\mathcal{A} = \bigcap_t \mathcal{A}_t$ алгебр распределением вероятностей.

Если $\mathcal{A}_t$ есть счетные алгебры, принцип построения модели процесса сохраняется, порождая конечно-аддитивную меру на $\mathcal{A}$ (для которой, однако, вероятности $P(A_t, A_t, \dots)$ не будут, в общем, точными при счетных множествах отсчетов). Конечно-аддитивной мере соответствует единственная счетно-аддитивная мера согласно известной теореме Колмогорова о согласованных распределениях¹. Меры может и не существовать, а задаваться на сопряженном пространстве, тогда процесс в классическом определении называется обобщенным². Например, это процесс, у которого $Y_i = \int X_i \varphi_i(t) dt$, $i=1, 2, \dots$, есть нормальные с.в. с нулевыми средними и $MY_i Y_j = \int \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt$. При нашем подходе в невыполнении счетной аддитивности нет «криминала», а обобщенный процесс естествен как задание средними на линейных преобразованиях.

2. Задание процесса переходными моделями. Этот способ состоит в последовательном задании переходных моделей $\mathcal{M}^{X_t}$, $\mathcal{M}_{X_{t_1}}^{X_{t_2}}$, $\mathcal{M}_{X_{t_1}, X_{t_2}}^{X_{t_3}}$, ... при произвольном выборе отсчетов $t < t_1 < t_2 < \dots$. Если все последующие переходные модели зависят только от последнего момента: $\mathcal{M}_{X_{t_1}, \dots, X_{t_{n-1}}}^{X_{t_n}} = \mathcal{M}_{X_{t_{n-1}}}^{X_{t_n}}$, то способ задания называется *марковским*. Он характерен для точных вероятностей и оказывается малоэффективным при неточных. Причина неудобства лежит, во-первых, в трудностях согласования переходных моделей, если t непрерывно, и во-вторых, в «расползании» модели $\mathcal{M}^{X_{t_n}}$ при увеличении t_n в силу обоюдного влияния на нее как ширины модели $\mathcal{M}^{X_{t_{n-1}}}$, так и расплывчатости переходной модели $\mathcal{M}_{X_{t_{n-1}}}^{X_{t_n}}$. При точных и тех, и других, заданных вероятностями, ничего подобного не наблюдается, что и дает жизнь таким представлениям.

4.2. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА

Процессы второго порядка. Корреляционными свойствами процесса X_t будем называть согласованное множество средних $\bar{M}(\sum e_i X_{t_i} + \sum \sum d_{ij} X_{t_i} X_{t_j})$, или в векторной форме

$$\bar{M}(\mathbf{e}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}), \mathbf{e}^T = (e_1, e_2, \dots),$$

$$\mathbf{D} = \{d_{ij}\}, \mathbf{X}^T = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots) \quad (4.3)$$

при всевозможных выборах отсчетов $t_i \in T$ и коэффициентов c_i и d_{ij} конечных сумм. Нижние $\bar{M}$ также определены, но не записаны, так как сразу выражаются через верхние. Удобно считать матрицу $\mathbf{D}$ симметричной: $d_{ij} = d_{ji}$, что, как можно видеть, не скажется на корреляционных свойствах.

Отметим, что корреляционные свойства есть более широкое понятие, чем просто границы $\bar{r}_{t,\tau} = \bar{M}X_t X_\tau$ корреляционной функции (если только не считать корреляции точными). Процесс, заданный своими корреляционными свойствами, называется *процессом второго порядка*. В его первичной основе обязательно лежит какой-то непротиворечивый набор средних из (4.3), скажем,

$$\bar{M}(\mathbf{e}_{(k)}^T \mathbf{X}_{(k)} + \mathbf{X}_{(k)}^T \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{X}_{(k)}) = \bar{m}_{(k)}, k = 1, 2, \dots,$$

где $\mathbf{X}_{(k)}$ составляются, в общем, из разных последовательностей дискретных отсчетов $\mathbf{X}_{(k)} = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$, а $\bar{m}_{(k)}$ — первичные значения. В частности, это могут быть границы средних $\bar{M}X_t$ и корреляций $\bar{r}_{t,\tau}$ при всех или некоторых t и τ . Любой процесс расширением приводится к процессу второго порядка, для чего за первичные берутся средние вида (4.3).

Первичный набор продолжается на остальные корреляционные свойства в соответствии с общей формулой (с одновременным согласованием $\bar{m}_{(k)}$, если исходно они заданы несогласованными):

$$\bar{M}(\mathbf{e}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}) = \inf \{ [c + \sum c_k^+ \bar{m}_{(k)}] : c + \sum c_k^+ (\mathbf{e}_{(k)}^T \mathbf{X}_{(k)} + \mathbf{X}_{(k)}^T \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{X}_{(k)}) \geq \mathbf{e}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X} \}, \quad (4.4)$$

где двоеточием отделено условие, при котором ищется инфимум в (4.4) выбором c , c_k^+ . Из этого условия становится ясным, что нетривиальными могут быть средние только для квадратичных форм от таких векторов $\mathbf{X}^T = (X_{t_1}, X_{t_2}, \dots)$, компоненты которых встречаются хотя бы в одном $\mathbf{X}_{(k)}$.

Сказанное порождает неудобства, поэтому подчас разумным и наглядным следует признать существование определенной гладкости корреляционных свойств по времени t , что дает основание переходу к фиксированному набору отсчетов $t_1, t_2, \dots, t_n$, а в результате — к единому вектору $\mathbf{X}$, считая, что между отсчетами будет иметь место нечто промежуточное. Тогда условие в (4.4) переписывается:

$$c + \sum c_k^+ (\mathbf{e}_{(k)}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{X}) \geq \mathbf{e}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}.$$

Если принять еще одно допущение, что процесс имеет нулевое среднее $\bar{M}X_t = 0$, $\forall t$, и что заданными являются $\bar{m}_{(k)} = \bar{M} \mathbf{X}^T \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{X}$, то возникают дополнительные упрощения:

$$\bar{M}(\mathbf{e}^T \mathbf{X} + \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X}) = \bar{M} \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X} = \inf \{ \sum c_k^+ \bar{m}_{(k)} : \sum c_k^+ \mathbf{X}^T \mathbf{D}_{(k)} \mathbf{X} \geq \mathbf{X}^T \mathbf{D} \mathbf{X} \}. \quad (4.5)$$

Здесь в отличие от общей формулы (4.4) свободный коэффициент c положен равным 0, ибо таким он будет получаться при нахождении инфимума в (4.4) и принятых допущениях.

Неравенство в условии формулы (4.5) эквивалентно неотрицательной определенности матриц $\sum c_k^+ \mathbf{D}_{(k)} - \mathbf{D}$, что символически

¹ Боровков А. А. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1972. — С. 261.

² Гельфанд Н. М., Виленкин Н. Я. Некоторые применения гармонического анализа. — М.: ФМЛ, 1974. — Вып. 4. — С. 302.

выглядит следующим образом: $\sum c_k^+ D_{(k)} - D \geq 0$. Будем говорить, что $\sum c_k^+ D_{(k)}$ *мажорирует* D . Итак, продолжение средних на квадратичные формы при симметричных матрицах D эквивалентно поиску среди матричных конечных линейных сумм $\sum c_k^+ D_{(k)}$, мажорирующих D , такой, которой соответствует минимальное значение $\sum c_k^+ \bar{m}_{(k)}$.

Пример 4.4. Пусть заданными являются $MX_i = 0$, $\overline{MX_i^2} = \bar{\sigma}^2$, $\overline{MX_i^2} = \sigma^2 = -\bar{M}(-X_i^2)$, $i=1, \dots, n$. Они всегда будут непротиворечивыми, если $\sigma^2 \leq \bar{\sigma}^2$, и согласованными. Здесь первичными будут единичные матрицы $\pm I$ со средними соответственно $\bar{\sigma}^2$, $-\bar{\sigma}^2$ (приведенными к верхнему). Неравенство после двоеточия в (4.5) запишется так: $cI - D \geq 0$, тогда инфимум в (4.5) достигается при c , равном максимальному $\lambda_{\max}$ собственному числу матрицы D , и в зависимости от его знака $\bar{M}X^+DX = \max\{\lambda_{\max}\bar{\sigma}^2, \lambda_{\max}\bar{\sigma}^2\}$.

Представление процессов второго порядка семействами средних и ковариационных функций. Процесс называется *простым* второго порядка, если он задается точным средним $MX_t = m_t$ и точной ковариацией $b(t, \tau)$, определяемой формулой

$$b(t, \tau) = M(X_t - m_t)(X_\tau - m_\tau).$$

Обозначим модель простого процесса второго порядка как $\langle m, b \rangle$, где сокращенно $m = \{m_t\}$, $b = \{b(t, \tau)\}$.

Объединение простых процессов записывается:

$$\mathcal{M} = \bigvee_{m \in \mathfrak{M}} \bigvee_{b \in \mathfrak{B}_m} \langle m, b \rangle, \quad (4.6)$$

где множество $\mathfrak{M}$ называется собственным семейством средних, а множества $\mathfrak{B}_m$ — собственными семействами ковариаций (в общем, вид которых может быть разным для разных средних m). Объединение (4.6) ведет к процессу второго порядка, задаваемому средними

$$\begin{aligned} \bar{M}(\sum c_i X_{t_i} + \sum \sum d_{ij} X_{t_i} X_{t_j}) = \sup_{m \in \mathfrak{M}} [\sum c_i m_{t_i} + \\ + \sum \sum d_{ij} m_{t_i} m_{t_j} + \sup_{b \in \mathfrak{B}_m} \sum \sum d_{ij} b(t_i, t_j)]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Причем все ковариации семейств $\mathfrak{B}_m$ должны быть неотрицательно определенными в том смысле, что $\sum \sum c_i c_j b(t_i, t_j) \geq 0$ при любом выборе отсчетов t_i и коэффициентов c_i конечных сумм. Покажем, что такой способ задания процессов второго порядка является универсальным.

Теорема 4.1. Каждый процесс второго порядка эквивалентным образом может быть задан в виде (4.6) собственными выпуклыми семействами $\mathfrak{M}$ средних и $\mathfrak{B}_m$, $m \in \mathfrak{M}$, ковариаций.

Доказательство. Запишем $\mathcal{M} = \bigvee_{m \in \mathfrak{M}} \mathcal{M}_m$, где $\mathcal{M}_m = \mathcal{M} \wedge \langle m \rangle$ есть m -сече-

ние. Обозначим $\mathcal{M}_{m, b} = \mathcal{M}_m \wedge \langle b \rangle$ модель процесса с точным средним m_t и точной ковариацией $b(t, \tau)$, которая будет собственной, если пересечение непусто.

Заметим, что $\langle b \rangle$ предполагает точное значение m_t и имеет смысл лишь для m_t -сечения $\mathcal{M}_m$. Так как X_t есть процесс второго порядка, то его m_t , а затем $b(t, \tau)$ -сечением будет $\mathcal{M}_{m, b} = (\mathcal{M} \wedge \langle m \rangle) \wedge \langle b \rangle = \langle m \rangle \wedge \langle b \rangle = \langle m, b \rangle$, что соответствует простому процессу второго порядка. Обозначая $\mathfrak{B}_m = \{b : \mathcal{M}_{m, b} \neq \emptyset\}$ и выражая $\mathcal{M}$ объединением сечений, получаем представление (4.6), что и доказывает теорему.

Скрытое содержание этой теоремы, заслуживающее пристального внимания, заключается в том, что статистически неустойчивый процесс, у которого точных средних и ковариаций вовсе не существует, представляется семейством составляющих его процессов с точными значениями m_t и $b(t, \tau)$, т. е. статистически устойчивых. Это общее представление удобно, когда оно не чересчур громоздко.

Формулы (4.7) для расчета средних через семейственное представление можно рассматривать как результат применения к процессам второго порядка подчиненно-аддитивного представления (4.1): $X_{t, m} = m_t + \xi_{t, m}$, где $\xi_{t, m}$ имеют нулевые средние $M_m \xi_{t, m} = 0$ и описываются семействами $\mathfrak{B}_m$ ковариаций. Расширенным будет представление вида (4.2): $X_{t, m} = m_t + \xi_t$, где «добавка» ξ_t имеет нулевое среднее $M \xi_t = 0$, свободна от m_t и определяется объединением $\bigcup_{m \in \mathfrak{M}} \mathfrak{B}_m$ семейств. Связь характеристик расширенного представления с исходными на одном частном случае будет исследована ниже.

Интервальные ковариации и корреляции. Корреляционные свойства в нашей интерпретации очень разнообразны. А нельзя ли упрощенно описать связь между X_t и X_τ с учетом неопределенности этой связи, вызванной как нашим незнанием, невозможностью ее точно проанализировать, так и статистической неустойчивостью процесса?

Уже говорилось, что эта связь характеризуется границами корреляций: $\bar{r}(t, \tau) = \bar{M}X_t X_\tau$. Но этого мало, и вот почему. Каждое X_t согласно аддитивному представлению складывается из двух составляющих: полностью неизвестной, статистически неустойчивой m_t — это любая функция из собственного семейства $\mathfrak{M}$, и случайной добавки и $\xi_{t, m}$ (возможно, подчиняющейся m_t). И чаще оказывается, что своему размаху границы $\bar{r}(t, \tau)$ обязаны именно влиянию m_t , а этого не хотелось бы. Выделим корреляционные свойства, которые были бы отделены от m_t и характеризуют остаток. При точных средних m_t и корреляциях $r(t, \tau)$ такие свойства дает ковариационная функция $b(t, \tau) = r(t, \tau) - m_t m_\tau$, а при неточных m_t — границы ковариаций:

$$b_1(t, \tau) = \underline{M}(X_t - \underline{m}_t)(X_\tau - \underline{m}_\tau), \quad b_2(t, \tau) = \underline{M}(X_t - \bar{m}_t)(X_\tau - \bar{m}_\tau),$$

$$b_3(t, \tau) = \bar{M}(X_t - \underline{m}_t)(X_\tau - \bar{m}_\tau), \quad b_4(t, \tau) = \bar{M}(X_t - \bar{m}_t)(X_\tau - \underline{m}_\tau).$$

Границ четыре: b_1 и b_2 — нижние, а b_3 и b_4 — верхние.

Каждую из ковариаций можно расписать как некоторую сторону собственных семейств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}_m$, используя для этого (4.7). Например,

$$b_1(t, \tau) = \inf_{m \in \mathfrak{M}} \inf_{b \in \mathfrak{B}_m} [b(t, \tau) + (m_t - \underline{m}_t)(m_\tau - \underline{m}_\tau)] = \inf_{m \in \mathfrak{M}} [b_m(t, \tau) + (m_t - \underline{m}_t)(m_\tau - \underline{m}_\tau)],$$

где $b_m(t, \tau)$ — нижняя грань ковариаций в $\mathfrak{B}_m$, и так для остальных (нетрудно вывести их в качестве упражнения).

Рассмотрим пример, из которого можно извлечь содержание каждой из ковариаций.

Пример 4.5. Пусть процесс X_t второго порядка имеет постоянное среднее и может находиться в одном из двух состояний, в которых среднее и ковариация равны соответственно либо m_1 , $K_1(t, \tau)$, либо m_2 , $K_2(t, \tau)$, где m_1 и m_2 — два числа, причем для определенности считаем $m_1 > m_2$. Это дает описания двух простых процессов, составляющих X_t , а вместе задает модель X_t в виде объединения: $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \vee \mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_1 = \langle m_1, K_1 \rangle$, $\mathcal{M}_2 = \langle m_2, K_2 \rangle$. Тогда

$$b_1(t, \tau) = \min \{K_1(t, \tau); (m_2 - m_1)^2 + K_2(t, \tau)\}, \\ b_2(t, \tau) = \min \{K_1(t, \tau) + (m_2 - m_1)^2; K_2(t, \tau)\}, \\ b_3(t, \tau) = b_4(t, \tau) = \max \{K_1(t, \tau); K_2(t, \tau)\}.$$

Здесь $b_1(t, \tau)$ и $b_2(t, \tau)$ могут оказаться чуть завышенными по сравнению с минимальным из двух значений $K_1(t, \tau)$ и $K_2(t, \tau)$, тем не менее $\min\{b_1(t, \tau), b_2(t, \tau)\} = \min\{K_1(t, \tau), K_2(t, \tau)\}$.

Если все четыре ковариации равны 0, то X_t и X_τ называются нековариированными (см. (2.10)), что может быть следствием не только того, что в подчиненно-аддитивном представлении (4.1) случайные составляющие $\xi_{t,m}$ при каждом m_t некоррелированы между собой, т. е. $M_m \xi_{t,m} \xi_{\tau,m} = 0$ (тогда $b_1(t, \tau) = \inf_m (m_t - \underline{m}_t) \times (m_\tau - \underline{m}_\tau) = 0$ и аналогично для остальных ковариаций), но и того, что просто случайная составляющая отсутствует, т. е. $X_t \equiv m_t$, как в примере 4.3 сугубо-ограниченного процесса, о котором известно только, что его реализации не могут по модулю превышать некоторый уровень.

Используем расширенное аддитивное представление (4.2): $X_t \subseteq m_t + \xi_t$. Так как ξ_t описывается объединенным по m семейством $\bigcup \mathfrak{B}_m$, то границами ковариаций будут

$$\underline{b}(t, \tau) = \inf_{m \in \mathfrak{M}} \inf_{b \in \mathfrak{B}_m} b(t, \tau), \\ \bar{b}(t, \tau) = \sup_{m \in \mathfrak{M}} \sup_{b \in \mathfrak{B}_m} b(t, \tau).$$

Это будут расширенные границы, так как, в общем,

$$\underline{b}(t, \tau) \leq \min \{b_1(t, \tau), b_2(t, \tau)\}, \quad \bar{b}(t, \tau) \geq \max \{b_3(t, \tau), b_4(t, \tau)\}.$$

Равенства имеют место, очевидно, при $\mathfrak{B}_m \equiv \mathfrak{B}$, $\forall m$, но не только (см. пример 4.5).

Рассмотрим связь ковариаций с корреляционными функциями: нижней $\underline{r}(t, \tau) = \underline{M} X_t X_\tau$ и верхней $\bar{r}(t, \tau) = \bar{M} X_t X_\tau$. На основании расширенного аддитивного представления имеем:

$$\underline{r}(t, \tau) = \inf_{m_t \in \mathfrak{M}} [m_t m_\tau + \underline{b}_m(t, \tau)] \geq \inf_{m_t \in \mathfrak{M}} m_t m_\tau + \underline{b}(t, \tau); \\ \bar{r}(t, \tau) = \sup_{m_t \in \mathfrak{M}} [m_t m_\tau + \bar{b}_m(t, \tau)] \leq \sup_{m_t \in \mathfrak{M}} m_t m_\tau + \bar{b}(t, \tau).$$

При $t = \tau$ получаем соответственно

$$\underline{M} X_t^2 \geq (\underline{M} | X_t)^2 + \underline{b}(t, t), \quad \bar{M} X_t^2 \leq (\bar{M} | X_t)^2 + \bar{b}(t, t).$$

Все эти неравенства заменяются на равенства при свободно-аддитивном представлении. В этом случае точные значения корреляций $r(t, \tau)$ эквивалентны точным средним $\underline{M} X_t = m_t$ и точной ковариации $b(t, \tau)$. Вообще при точных средних m_t границы корреляции с поправкой на слагаемое $m_t m_\tau$ совпадают с границами ковариаций:

$$\underline{r}(t, \tau) = m_t m_\tau + \underline{b}(t, \tau), \quad \bar{r}(t, \tau) = m_t m_\tau + \bar{b}(t, \tau).$$

Разложение процесса по базису. Смысл любых разложений процесса сводится к упрощающей его замене дискретным набором коэффициентов.

Пусть $e_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$, есть система ортонормированных функций, заданных на отрезке $[0, T]$:

$$\int e_i(t) e_j(t) dt = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Здесь и далее интеграл от 0 до T — по мере-длине. Функции $e_j(t)$ являются координатными «осями» Гильбертова пространства $\mathcal{L}_2$ всех интегрируемых с квадратом функций: $\mathcal{L}_2 = \{c_t : \int c_t^2 dt < \infty\}$. Скалярным произведением в этом пространстве будет $(c_t; a_t) = \int c_t a_t dt$. В этих обозначениях ортонормированность записывается: $(e_i(t); e_j(t)) = \delta_{ij}$.

Система $e_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$, ортонормированных функций называется полной, если для любой функции $c_t \in \mathcal{L}_2$ имеет место равенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \left[c_t - \sum_{j=1}^k (\int c_t e_j(t) dt) e_j(t) \right]^2 dt = 0.$$

В этой формуле сумма внутри квадратных скобок есть разложение функции c_t в ряд по $e_j(t)$.

Полная ортонормированная система функций $e_j(t)$ называется базисом в $\mathcal{L}_2$. Например, базисы в $\mathcal{L}_2$ на $[0, T]$ образуют: 1) нормированные полиномы Лежандра, 2) гармонические функции

$\sqrt{2/T} \frac{\sin}{\cos} (2\pi jt/T)$, $j=1, 2, \dots$, дополненные постоянной $e_0(t) = 1/\sqrt{T}$.

Рассмотрим разложение процесса по базису

$$X_t = \sum_{j=1}^{\infty} X(j) e_j(t), \quad X(j) = \int X_t e_j(t) dt, t \in [0, T]. \quad (4.8)$$

Считается, что множество $\mathcal{X} = \mathcal{L}_2$ достоверных реализаций процесса X_t должно состоять из интегрируемых с квадратом функций.

Свойства коэффициентов разложения будут полностью определяться свойствами исходного процесса. В частности, корреляционные свойства процесса однозначно определяют корреляционные свойства коэффициентов разложения, что видно из цепочки равенств, справедливых для конечных сумм:

$$\begin{aligned} \overline{M} [\sum c_i X(i) + \sum \sum d_{ij} X(i) X(j)] &= \\ &= \overline{M} [\sum c_j \int X_t e_j(t) dt + \sum \sum d_{ij} \int X_t e_i(t) dt \times \\ &\times \int X_t e_j(t) dt] = \overline{M} [\int X_t g(t) dt + \iint X_t X_\tau h(t, \tau) dt d\tau] = \\ &= \lim_{|\Delta t| \rightarrow 0} \overline{M} [\sum_m X_{t_m} g(t_m) (t_{m+1} - t_m) + \\ &+ \sum_m \sum_n X_{t_m} X_{t_n} h(t_m, t_n) (t_{m+1} - t_m) (t_{n+1} - t_n)], \end{aligned}$$

где $g(t) = \sum c_i e_i(t)$, $h(t, \tau) = \sum \sum d_{ij} e_i(t) e_j(\tau)$.

Для каждой реализации из $\mathcal{L}_2$ справедливо неравенство $\int X_t^2 dt \geq \sum_{j=1}^k X(j)^2$, доказываемое следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 \leq \int \left[X_t - \sum_{j=1}^k X(j) e_j(t) \right]^2 dt &= \int \left[X_t^2 - 2 X_t \sum_{j=1}^k X(j) e_j(t) + \right. \\ &+ \left. \left(\sum_{j=1}^k X(j) e_j(t) \right)^2 \right] dt = \int X_t^2 dt - \sum_{j=1}^k X(j)^2. \end{aligned}$$

Отсюда, если процесс имеет конечную среднюю энергию, т. е.

$$\int \overline{M} X_t^2 dt < \infty, \text{ то } \overline{M} \sum_{j=1}^k X(j)^2 \leq \overline{M} \int X_t^2 dt \leq \int \overline{M} X_t^2 dt;$$

$$\underline{M} \sum_{j=1}^k X(j)^2 \leq \underline{M} \int X_t^2 dt.$$

Переходя к пределу $k \rightarrow \infty$, получаем

$$\overline{M} \sum_{j=1}^{\infty} X(j)^2 \leq \overline{M} \int X_t^2 dt, \quad \underline{M} \sum_{j=1}^{\infty} X(j)^2 \leq \underline{M} \int X_t^2 dt. \quad (4.9)$$

Неравенства наводят на мысль, что между процессом X_t и его разложением (4.8) может иметь место «энергетический дисба-

баланс». В этом случае корреляционные свойства коэффициентов разложения не будут определять полных корреляционных свойств исходного процесса и переход от процесса к его разложению вызовет потери.

Рассмотрим тот случай, когда переход к разложению не связан с потерями в свойствах второго порядка. Будем понимать разложение (4.8) в *среднеквадратическом скв-смысле*, соответствующем равенству

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \overline{M} \int \left[X_t - \sum_{j=1}^k X(j) e_j(t) \right]^2 dt = 0.$$

Ниже считаем, что процесс имеет конечную среднюю энергию.

В силу неравенств (4.9) имеем

$$\begin{aligned} 0 \leq \overline{M} \int X_t^2 dt - \overline{M} \sum_{j=1}^{\infty} X(j)^2 &\leq \overline{M} \left[\int X_t^2 dt - \right. \\ &- \left. \sum_{j=1}^{\infty} X(j)^2 \right] = \lim_{k \rightarrow \infty} \overline{M} \int \left[X_t - \sum_{j=1}^k X(j) e_j(t) \right]^2 dt = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что неравенства в (4.9) заменяются на равенства

$$\overline{M} \sum_{j=1}^{\infty} X(j)^2 = \overline{M} \int X_t^2 dt, \quad \underline{M} \sum_{j=1}^{\infty} X(j)^2 = \underline{M} \int X_t^2 dt.$$

В этом случае корреляционные свойства процесса будут эквивалентны корреляционным свойствам коэффициентов разложения. Сказанное вкладывается в теорему.

Теорема 4.2. Пусть процесс непрерывен в скв-смысле на $[0, T]: \lim_{\tau \rightarrow t} \overline{M} (X_\tau - X_t)^2 = 0$. Тогда его разложение (4.8) в ряд справедливо в скв-смысле. При этом корреляционные свойства процесса X_t и его коэффициентов разложения $X(j)$ эквивалентны.

Доказательство. Доказательство второй части теоремы, по сути, содержится в рассуждениях, предшествующих теореме, поэтому осталось доказать первую. При точных среднем и ковариации $b(t, \tau)$ эта теорема является известной [1, с. 500]. В общем случае свойства второго порядка эквивалентны заданию собственных семейств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}_m$, $m \in \mathfrak{M}$. Из непрерывности процесса вытекает равномерная непрерывность всех функций из $\mathfrak{M}$ и всех процессов $\xi_{t, m}$ в подчиненно-аддитивном представлении $X_t = m_t + \xi_{t, m}$. Отсюда каждая реализация m_t среднего и каждый процесс $\xi_{t, m}$ может быть разложен в ряд по базису, а в силу равномерной непрерывности скв-сходимость этого ряда будет равномерной относительно $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}_m$. Поэтому, обозначая $m(j)$ и $\xi_m(j)$ — коэффициенты разложения $m(t)$ и $\xi_{t, m}$ в ряды по базису $e_j(t)$ и используя с_r-неравенство § 3.1, получаем

$$\begin{aligned}
& \overline{M} \int \left[X_t - \sum_1^k X(j) e_j(t) \right]^2 dt = \\
& = \sup_{m \in \mathfrak{M}} 2 \overline{M}_m^{\xi} \int \left[m_t - \sum_1^k m(j) e_j(t) + \xi_{t, m} - \right. \\
& \left. - \sum_1^k \xi_m(j) e_j(t) \right]^2 dt \leq \sup_{m \in \mathfrak{M}} \left\{ 2 \int \left[m_t - \sum_1^k m(j) e_j(t) \right]^2 dt + \right. \\
& \left. + \overline{M}_m^{\xi} 2 \int \left[\xi_{t, m} - \sum_1^k \xi_m(j) e_j(t) \right]^2 dt \right\} = \\
& = 2 \sup_{m \in \mathfrak{M}} \left\{ \int \left[m_t - \sum_1^k m(j) e_j(t) \right]^2 dt + \right. \\
& \left. + \sup_{b \in \mathfrak{B}_m} \overline{M}_{m, b}^{\xi} \int \left[\xi_{t, m, b} - \sum_1^k \xi_{m, b}(j) e_j(t) \right]^2 dt \right\} \leq \\
& \leq 2 \sup_{m \in \mathfrak{M}} \int \left[m_t - \sum_1^k m(j) e_j(t) \right]^2 dt + \\
& + \sup_{b \in \mathfrak{B}} \left[b(t, \tau) - \sum_1^k \sum_1^k \int \int b(t, \tau) e_i(t) e_j(\tau) dt d\tau \right].
\end{aligned}$$

Оба слагаемых правой части стремятся к 0 при $k \rightarrow \infty$ в силу равномерной непрерывности семейств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B} = \bigcup_{m \in \mathfrak{M}} \mathfrak{B}_m$, что доказывает теорему.

Отметим, что скв-непрерывный процесс второго порядка при его разложении преобразуется в последовательность также второго порядка.

4.3. ОДНОРОДНЫЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Однородные процессы. Понятие однородности применительно к последовательностям вводилось в § 3.1. Здесь оно прилагается к процессам.

Процесс X_t считается *однородным*, если его модель симметрична к сдвигам во времени: $\mathcal{M}^{X_t} \equiv \mathcal{M}^{X_{t+\tau}}$, что эквивалентно тождеству средних $\overline{M}f\{X_t\} \equiv \overline{M}f\{X_{t+\tau}\}$, $\forall f \in \mathcal{F}$, $\forall \tau$. Совершенно ясно, что понятие однородности имеет точный смысл лишь для процессов, определенных на всей длине временной оси $(-\infty, \infty)$. Но можно рассматривать участок однородного процесса любой конечной протяженности $[0, T]$. Однородность позволяет сэкономить на задании процесса, сделав это раз для одного положения признаков на временной оси и перенести те же значения на любой сдвиг по времени, существенно преумножая тем самым первичный набор.

Процесс будет однородным, если выполняются два условия:

1) набор первичных функционалов, определяющих процесс, при

сдвиге во времени преобразуется сам в себя; 2) первичные средние при сдвиге во времени не меняются. Сказанное символично записывается:

$$1) g\{X_t\} \in \mathcal{G} \Rightarrow g\{X_{t+\tau}\} = g_\tau\{X_t\} \in \mathcal{G}, \forall \tau;$$

$$2) \tilde{M}g\{X_t\} = \tilde{M}g\{X_{t+\tau}\}, \forall g \in \mathcal{G}, \forall \tau.$$

Примером однородного является процесс, определенный постоянными границами среднего $\overline{M}X_t = m$, $\overline{M}X_t = \bar{m}$ и текущей мощности $\overline{M}X_t^2 = r$, $\overline{M}X_t^2 = \bar{r}$. Первичный набор здесь создают всевозможные отсчеты процесса и их квадраты: $\mathcal{G} = \{\pm x_t, \pm x_t^2, -\infty < t < \infty\}$, и видно что этот набор не меняется при сдвигах во времени, как и средние на нем.

Объединение и пересечение (имея в виду модели) однородных процессов приводят к однородному процессу. Сужение же может привести к нарушению свойства однородности, поскольку внутри однородного процесса существуют неоднородные составляющие, которые могут «выскочить» при этом наружу.

Любой процесс X_t расширением («забыванием» его неоднородных особенностей) может быть приведен к однородному процессу Y_t . Для этого нужно положить $\overline{M}f\{Y_t\} = \sup_{-\infty < \tau < \infty} \overline{M}f\{X_{t+\tau}\}$, $\forall f \in \mathcal{F}$, и эти значения зададут Y_t .

Голый процесс, соответствующий полному отсутствию каких-либо данных, всегда однороден: сдвиг во времени не меняет нулевых сведений о таком процессе.

Инвариантные во времени преобразования однородных процессов ведут к однородному процессу, например нелинейные безынерционные преобразования вида $Y_t = f\{X_t\}$, линейные преобразования вида $Y_t = \int h(t-\tau) X_\tau d\tau$. Складывание, вычитание и перемножение однородных процессов приводит снова к однородному процессу.

Расширяя понятие однородности, будем говорить не о неизменности всех свойств процесса по отношению к сдвигу во времени, а о неизменности только некоторых из них. Процесс называется $\mathcal{Q}$ -однородным, если $\overline{M}q\{X_t\} = \overline{M}q\{X_{t+\tau}\}$, $\forall q \in \mathcal{Q}$, $\forall \tau$, т. е. при сдвиге во времени не меняются средние признаков набора $\mathcal{Q}$. Это *частично-однородный* процесс, но если $\mathcal{Q}$ является первичным набором, он будет однородным в общем смысле. То же самое будет, если $\mathcal{Q} \supset \mathcal{G}$, где $\mathcal{G}$ есть первичный набор. Если же $\mathcal{Q} \subset \mathcal{G}$, то $\mathcal{Q}$ -однородный процесс сам по себе может не быть однородным, так как некоторые его первичные данные способны, в общем, зависеть от сдвига во времени.

Например, если первичными являются $\overline{M}X_t = m$, $\overline{M}X_t = \bar{m}$, $\overline{M}X_t^2 = r$, $\overline{M}X_t^2 = \bar{r}$, то процесс является однородным. Если же помимо этих имеются другие первичные данные, зависящие от времени, например $\overline{M}X_t^3 = m_{(3)}(t)$, то процесс будет уже только частично $\{\pm x, \pm x^2\}$ -однородным, а среднее и мощность — его однородные параметры.

Процесс, корреляционные свойства которого не меняются во времени, называется *однородным в широком смысле*. Для такого процесса тождественно по τ

$$\begin{aligned} \bar{M}(\sum c_i X_{t_i} + \sum \sum d_{ij} X_{t_i} X_{t_j}) &= \\ &= \bar{M}(\sum c_i X_{t_i+\tau} + \sum \sum d_{ij} X_{t_i+\tau} X_{t_j+\tau}). \end{aligned}$$

Это частично-однородный процесс, но если других кроме корреляционных данных нет (т. е. процесс второго порядка), то он однороден в общем смысле.

Рассмотрим однородные процессы второго порядка. Собственное семейство $\mathfrak{M}$ средних для них не должно меняться при сдвигах во времени $m_t \in \mathfrak{M} \Rightarrow m_{t+\tau} \in \mathfrak{M}$, $\forall \tau$, и то же самое можно сказать о собственных семействах ковариаций: $b(t, t') \in \mathfrak{B}_{m_t} \Rightarrow b(t+\tau, t'+\tau) \in \mathfrak{B}_{m_{t+\tau}}$. Границы ковариаций должны зависеть только от разности аргументов: $b(t, t') = b(t-t')$, $\bar{b}(t, t') = \bar{b}(t-t')$, хотя, в общем, каждая из ковариаций собственного семейства, как будет видно, таким свойством не обязана обладать.

Детерминированная функция c_t , рассматриваемая как процесс с единственной возможной реализацией, будет однородна, если только эта реализация есть тождественная постоянная $c_t \equiv m$. Процесс второго порядка, определяемый точным средним m_t и ковариацией $b(t, t')$, будет однородным, если только среднее постоянно: $m_t = m$, а ковариация зависит от разности аргументов: $b(t, t') = b(t-t')$. Назовем такую ковариацию *однородной*.

Рассмотрим сечение однородного процесса X_t точным средним m_t и ковариацией $b(t, t')$, записав следующим образом:

$$\mathcal{M}_{m,b} = \mathcal{M} \wedge \langle m, b \rangle.$$

Сечение может быть непустым, даже если m_t зависит от t и ковариация неоднородна. Следовательно, для однородных процессов в собственные семейства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}_m$ входят, в общем, неоднородные функции m_t и $b(t, t')$. Отсюда однородный процесс складывается из неоднородных составляющих.

Пример 4.6. Однородный процесс первого порядка. Пусть однородный процесс X_t задан постоянными границами среднего: $\underline{M}X_t = \underline{m}$, $\bar{M}X_t = \bar{m}$. Имеем процесс первого порядка. Для него

$$\bar{M} \sum c_i X_{t_i} = \sum_{c_i \geq 0} c_i \bar{m} + \sum_{c_i < 0} c_i \underline{m}.$$

Под такое же среднее для заданных c_i можно подогнать другой процесс первого порядка $X^*_{t_i}$, задав его точным средним вида $\bar{M}X^*_{t_i} = \bar{m}$ при t_i таких, что $c_i \geq 0$, и $\bar{M}X^*_{t_i} = \underline{m}$ при t_i таких, что $c_i < 0$. Этот неоднородный процесс, поскольку среднее его меняется во времени, включается в предыдущий: $X^*_{t_i} \subset X_t$, более того, входит лишь как один составляющий элемент в представле-

ние X_t в виде объединения m_t -простых процессов: $\mathcal{M} = \bigvee_{\underline{m} \leq m_t \leq \bar{m}} \langle m_t \rangle$, что иллюстрирует нашу мысль о неоднородных составляющих однородного процесса.

Таким образом, однородность суть симметрия исходных данных о процессе к сдвигу во времени.

Стационарные процессы. В § 3.1 были введены понятия стационарных признаков и стационарной последовательности с.в. Переложим эти понятия на процессы.

Признак $g\{X_t\}$ (функционал от X_t) называется *стационарным*, если для любого сдвига τ

$$M[g\{X_t\} - g\{X_{t+\tau}\}] = 0, \forall \tau.$$

Эквивалентным написанному будет:

$$\mathcal{M} \wedge \langle Mg\{X_t\} = a \rangle \wedge \langle Mg\{X_{t+\tau}\} = a' \rangle = \emptyset \text{ при } a \neq a'.$$

Смысл в том, что если бы вдруг оказалось точно известным среднее значение $Mg\{X_t\} = a$ признака g , то оно осталось бы таким же при любых сдвигах процесса во времени. Иначе говоря, если обозначить Mg -сечения через $\mathcal{M}_{Mg} = \mathcal{M} \wedge \langle Mg\{X_t\} \rangle$, то для $\mathcal{M}_{Mg}$ все средние от функционалов $g\{X_{t+\tau}\}$ должны быть точными, равными значению $Mg\{X_t\}$ независимо от сдвига τ : $M_{Mg}g\{X_{t+\tau}\} \equiv Mg$.

Процесс называется *Q-стационарным (частично-стационарным)*, если все признаки набора $\mathcal{Q}$ являются стационарными, и *стационарным*, если $\mathcal{Q}$ — любые признаки. Последнее определение требует комментариев. А существует ли вообще в природе стационарный процесс, т. е. такой, что каков бы признак f ни был взят, он оказывается стационарным? Если да, то это подразумевает, во-первых, возможность точного знания среднего любого признака, и во-вторых, полную идентичность работы внутреннего статистически устойчивого механизма процесса по времени. Но даже пусть такового процесса и нет, все равно абсолютизация стационарности как математической абстракции оказывается весьма удобной как уверенность, что какой бы набор $\mathcal{Q}$ признаков ни был взят, при сдвиге во времени их средние, если они вдруг станут точно известными, не меняются. Имея в виду, что практический выбор будет всегда ограничен нашими возможностями, так что фактически обращаться будем с частичной стационарностью.

Итак, стационарность — это статистическая устойчивость процесса в двух направлениях. Во-первых, по ансамблю, когда для процесса, если бы удалось его неоднократно «прокрутить» в одинаковых условиях, устанавливается (а иначе — декларируется) существование точных средних статистических Mq его признаков q . И во-вторых, по времени, когда утверждается неизменность этих средних статистических по течению процесса во времени.

Q-стационарные процессы представляются как семейства $M\mathcal{Q}$ -точных стационарных процессов: $\mathcal{M} = \bigvee_{M\mathcal{Q}} \mathcal{M}_{M\mathcal{Q}}$ и $\mathcal{M}_{M\mathcal{Q}}$ — это

сечение $\mathcal{M}$, т. е. складываются как ансамбли составляющих эти процессы стационарных «кусочков».

$\mathcal{Q}$ -стационарные процессы, очевидно, будут $\mathcal{Q}$ -однородными, а если $\mathcal{Q}=\mathcal{G}$ — есть первичный набор, то вообще однородными.

$\mathcal{G}$ -стационарные с первичным набором $\mathcal{G}$ процессы могут интерпретироваться как семейства составляющих их простых стационарных процессов, что соответствует объединению:

$$\langle \bar{M} \mathcal{G} \rangle = \bigvee_{M \in \mathcal{G}} \langle M \mathcal{G} \rangle \quad (4.10)$$

и эквивалентно следующей формуле расчета границ средних от вторичных признаков $\mathcal{L}\mathcal{G}$ (конечных линейных комбинаций первичных функционалов):

$$\bar{M} \sum c_i g_i \{X_t\} = \sup_{M \in \mathcal{G}} \sum c_i M g_i,$$

где супремум берется по простым процессам и соответствующим им $M g_i$, составляющим стационарные процессы.

Понятие стационарности существенно тоньше по сравнению с однородностью. Если однородность — это неизменность во времени внешних форм, а внутри может твориться все, что угодно, то стационарность — это неизменность внутренней структуры, тех простых частичек, на которые делится модель (см. (4.10)), и, как следствие, — внешних форм. При одинаковых первичных данных ИМ стационарного процесса всегда уже $\mathcal{G}$ -однородного. Понятия $\mathcal{G}$ -стационарности и $\mathcal{G}$ -однородности совпадают, лишь когда модель сама есть одна «простая частичка», т. е. $\mathcal{G}$ -точная.

В следующем утверждении устанавливаются алгебраические свойства моделей стационарных процессов.

Теорема 4.3. *Пересечение модели $\mathcal{Q}_1$ -стационарного процесса с $\mathcal{Q}_2$ -стационарным ведет к модели $\mathcal{Q}_1 \cup \mathcal{Q}_2$ -стационарного процесса. А модели $\mathcal{G}$ -стационарных процессов, заданные на одном и том же первичном наборе $\mathcal{G}$ функционалов, при объединениях сохраняют свойство стационарности.*

Доказательство. Пусть X_t и Y_t — соответственно $\mathcal{Q}_1$ - и $\mathcal{Q}_2$ -стационарные процессы. Тогда для $q \in \mathcal{Q}_1$ согласно определению и на основании коммутативности пересечения имеем при $a \neq a'$:

$$\mathcal{M}^X \wedge \mathcal{M}^Y \wedge \langle M q \{X_t\} = a \rangle \wedge \langle M q \{X_{t+\tau}\} = a' \rangle = \emptyset \quad \forall \tau,$$

что доказывает стационарность параметра $M q$, $q \in \mathcal{Q}_1$, для $\mathcal{M}^X \wedge \mathcal{M}^Y$. Это же, очевидно, верно и для $q \in \mathcal{Q}_2$, что доказывает первую часть теоремы.

Вторая часть вытекает из (4.10) и коммутативности операции объединения: $\langle \bar{M}^X \mathcal{G} \rangle \vee \langle \bar{M}^Y \mathcal{G} \rangle = (\vee \langle M^X \mathcal{G} \rangle) (\vee \langle M^Y \mathcal{G} \rangle) = \vee \langle M \mathcal{G} \rangle$, где в круглых скобках объединение производится соответственно по $\langle M^X \mathcal{G} \rangle \subset \langle \bar{M}^X \mathcal{G} \rangle$ и $\langle M^Y \mathcal{G} \rangle \subset \langle \bar{M}^Y \mathcal{G} \rangle$, а в конце — по $\langle M \mathcal{G} \rangle \subset \langle \bar{M}^X \mathcal{G} \rangle \vee \langle \bar{M}^Y \mathcal{G} \rangle$, что и требовалось доказать.

Смысл первой части теоремы 4.3 состоит в том, что если к известным имеющимся сведениям о частично-стационарном процессе добавляются дополнительные данные, обладающие свойством стационарности, то процесс останется стационарным. Например, если для стационарного процесса второго порядка указано дополнительно, что вероятности $P(a < X_t < b)$ существуют и не зависят от t , то процесс будет также стационарным, но уже на более широком ансамбле признаков. В развитие этой мысли абсолютно стационарный процесс может представляться как пересечение всех включающих его частично-стационарных процессов.

Рассмотрим пример частично-стационарного процесса.

Пример 4.7. Процесс первого порядка со стационарными свойствами. Определим объединение $\bigvee_m \langle M X_t = m \rangle$ как семейство процессов, о каждом из которых известно только, что среднее во времени не меняется и чему оно равно. В добавление к этому заданы границы $\underline{m}$, $\bar{m}$ среднего m . Для такого процесса (сравни с примером 4.6 однородного процесса) верно:

$$\bar{M} \sum c_i X_{t_i} = \max_{\underline{m} \leq m_i \leq \bar{m}} \sum c_i m_i = \max \{ \underline{m} \sum c_i, \bar{m} \sum c_i \}.$$

Из этого равенства следует полезный вывод: получается одна и та же модель первого порядка, принимает ли m значения внутри интервала $\underline{m}$, $\bar{m}$, или только крайние $\underline{m}$ и $\bar{m}$, т. е. та же модель достигается как объединение двух составляющих $\langle M X_t = m \rangle \vee \langle M X_t = \bar{m} \rangle$. Рассматриваемый нами процесс представляется $X_t = m + \xi_t$, где m принимает любое значение в отрезке $[\underline{m}, \bar{m}]$, а ξ_t свободен от m и $M \xi_t = 0$ — это все, что о ξ_t известно.

Отметим, что для $\mathcal{Q}$ -стационарных процессов со стационарным средним $M X_t$ (т. е. x_t как признаки входят в $\mathcal{Q}$) характерно подчиненно-аддитивное представление: $X_t = m + \xi_{t,m}$, где m — независимый от t параметр, а добавка свободна от m и при каждом его значении имеет нулевое среднее. Сказанное относится и к следующему процессу.

Процесс второго порядка называется стационарным, если стационарными являются все его признаки корреляций. Это есть разновидность частичной стационарности, где $\mathcal{Q}$ — линейно-квадратичные функционалы.

Процесс второго порядка X_t будет стационарным, если и только если выполняются два условия: 1) собственное множество $\mathfrak{M}$ средних содержит лишь константы m ; 2) собственные семейства $\mathfrak{B}_m$ ковариаций составляют однородные функции $b(t-t')$, зависящие только от разности аргументов.

Модель стационарного процесса второго порядка представляется в виде

$$\mathcal{M} = \bigvee_{m \in \mathfrak{M}} \bigvee_{b \in \mathfrak{B}_m} \langle m, b \rangle,$$

где $\langle m, b \rangle$ определяет простой стационарный процесс, заданный своими постоянным средним m и однородной ковариацией $b(\tau)$.

Интересно отметить, что процесс второго порядка может быть стационарным, хотя средние и ковариации совершенно неизвестны. Для такого процесса $\mathfrak{M}$ составляют любые константы, а $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}$ — класс всевозможных неотрицательно определенных функций $b(t-t')$, зависящих лишь от разности аргументов.

Замечание. По аналогии с предыдущим произвольный процесс (не обязательно второго порядка) со стационарными корреляционными свойствами будет называться *стационарным в широком смысле*. При этом некоторые другие его свойства (например, вероятности превышений), выходящие за рамки свойств второго порядка, могут зависеть от времени. Стационарный в широком смысле процесс расширением (при котором сохраняются только корреляционные свойства) приводится к стационарному процессу второго порядка.

Спектральные двойники процессов. Если рассматривать ограниченный интервал времени $0, T$ длительностью T , то гармонические функции $\sqrt{2/T} \sin(k2\pi t/T), \sqrt{2/T} \cos(k2\pi t/T), k=1, 2, \dots$, образуют ортонормированный базис. Дополним его постоянной $e_0(t) = 1/\sqrt{T}$. Согласно теореме 4.2 любой скв-непрерывный процесс в скв-смысле может быть разложен в ряд по этому базису

$$X_t = X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[X_k^s \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) + X_k^c \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \right], \quad 0 \leq t \leq T, \quad (4.11)$$

$$\text{где } X_0 = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T X_t dt, \quad X_k^s = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T X_t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt,$$

$$X_k^c = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T X_t \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt.$$

Ряд (4.11) называется *рядом Фурье*, а X_k^s и X_k^c — коэффициентами Фурье или *спектральными коэффициентами*.

Подчиненно-аддитивному представлению $X_t = m_t + \xi_{t,m}$ соответствуют аналогичные представления коэффициентов разложения Фурье левой и правой частей: $X_k^s = m_k^s + \xi_{k,m}^s, X_k^c = m_k^c + \xi_{k,m}^c$.

Смысл разложения процесса в ряд Фурье состоит в том, чтобы представить процесс в удобном виде, используя конечный набор спектральных коэффициентов. При этом $\mathcal{M}$ процесса преобразуется в модель $\mathcal{M}_\Phi$ коэффициентов Фурье, что формально записывается: $\mathcal{M}_\Phi = S_\Phi \mathcal{M}$, а S_Φ называется преобразованием Фурье.

Модель $\mathcal{M}_\Phi$ определена средними, рассчитываемыми по формуле:

$$\overline{M}_\Phi \{X_k^s, X_k^c, k=1, 2, \dots\} = \overline{M} \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T X_t \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt, \right.$$

$$\left. \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T X_t \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) dt, k=1, 2, \dots \right\} = \overline{M} f_\Phi \{X_t\},$$

где Φ — функционал в пространстве значений коэффициентов

Фурье, а f_Φ — его изображение в пространстве реализаций (см. § 2.1).

Если ограничиться рассмотрением только корреляционных свойств, то точным средним m_t и ковариациям $b(t, t')$ процесса X_t будут соответствовать точные средние m_k^s, m_k^c коэффициентов Фурье и точные их ковариации, определяемые выражениями:

$$b_{kl}^{ss} = \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T b(t, t') \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \sin\left(l \frac{2\pi}{T} t'\right) dt dt';$$

$$b_{kl}^{sc} = \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T b(t, t') \sin\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \cos\left(l \frac{2\pi}{T} t'\right) dt dt';$$

$$b_{kl}^{cc} = \frac{2}{T} \int_0^T \int_0^T b(t, t') \cos\left(k \frac{2\pi}{T} t\right) \cos\left(l \frac{2\pi}{T} t'\right) dt dt'.$$

Обозначим матрицу этих коэффициентов через B_Φ .

Собственным семействам средних $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{B}_m$ ковариаций процесса X_t будут соответствовать собственные семейства средних $\mathfrak{M}_\Phi = S_\Phi \mathfrak{M}$, где S_Φ — обозначение преобразования Фурье, и матриц $\mathfrak{B}_{\Phi, m}$ ковариаций в пространстве коэффициентов Фурье. Это соответствие взаимно однозначно.

Перейдем к тому случаю, когда X_t есть стационарный в широком смысле скв-непрерывный процесс, полагая для простоты $MX_t = 0$. Тогда все функции собственного семейства $\mathfrak{B}$ будут непрерывными, зависящими от разности аргументов, а ковариации коэффициентов Фурье будут равны $b_{kl}^{sc} = 0$ — это для перекрестных синус-косинус, а для совпадающих — уже не будут нулевыми и для отдельной $b(t-t') \in \mathfrak{B}$ записываются:

$$b_{kl}^{ss} = \frac{2}{\pi} \int_0^T b(\tau) \left[\frac{1}{k-l} \cos \frac{(k+l)\pi\tau}{T} \sin \frac{(k-l)\pi(T-\tau)}{T} \pm \right. \\ \left. \pm \frac{1}{k+l} \cos \frac{(k-l)\pi\tau}{T} \sin \frac{(k+l)\pi\tau}{T} \right] d\tau, \quad k \neq l;$$

$$b_{kk}^{ss} = b_{kk}^{cc} = 2 \int_0^T b(\tau) \frac{T-\tau}{T} \cos \frac{2k\pi\tau}{T} d\tau + 0 \left(\frac{1}{T} \right).$$

Из данных выражений видно, что при $T \rightarrow \infty$ и $k2\pi/T \rightarrow \omega$ имеет место сходимость:

$$b_{kl}^{ss} \rightarrow \delta_{kl} B(\omega), \quad b_{kl}^{cc} \rightarrow \delta_{kl} B(\omega),$$

$$\text{где } B(\omega) = 2 \int_0^\infty b(\tau) \cos \omega\tau d\tau$$

называется *энергетическим спектром процесса*, а $\delta_{kl} = 1$ при $k=l$ и 0 при $k \neq l$. Каждой точной неотрицательно определенной кор-

реляционной функции $b(t-t')$ соответствует энергетический спектр $B(\omega)$, обладающий свойствами:

$$B(\omega) \geq 0; B(\omega) = B(-\omega); B(\omega) \rightarrow 0; 2 \int_0^\infty B(\omega) d\omega = b(0).$$

Собственному семейству $\mathfrak{B}$ ковариаций, таким образом, ставится в соответствие собственное семейство энергетических спектров.

Рассмотрим следующие спектральные преобразования процесса:

$$X_{\omega, T}^s = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T X_t \sin \omega t dt, \quad X_{\omega, T}^c = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T X_t \cos \omega t dt.$$

Здесь ω называется частотой, а $X_{\omega, T}^s$ и $X_{\omega, T}^c$ — спектральными составляющими процесса. Очевидно, $X_{2\pi k/T, T}^s = X_k^s$, $X_{2\pi k/T, T}^c = X_k^c$, на основании чего можно сделать вывод, что спектральные составляющие $X_{\omega, T}^s$ и $X_{\omega, T}^c$, $\omega \in \mathcal{R}$, дают описание на интервале $(0, T)$ скв-непрерывного процесса.

Задать модель $\mathcal{M}$ процесса X_t — все равно, что задать соответствующую ей модель в частотной области при $-\infty < \omega < \infty$, где процесс X_t , $0 \leq t \leq T$, заменяется на пару процессов $X_{\omega, T}^s$, $X_{\omega, T}^c$, которую удобно записать в комплексном виде

$$\dot{X}_{\omega, T} = X_{\omega, T}^c + j X_{\omega, T}^s = \sqrt{\frac{2}{T}} \int_0^T X_t \exp(j \omega t) dt$$

и называть *спектральным двойником* X_t . Это комплексная функция ω . По формуле (4.11) можно, зная спектральный двойник, однозначно восстановить X_t , поэтому X_t и $\dot{X}_{\omega, T}$ эквивалентны.

Спектральные процессы. Понятие спектра процесса имеет под собой твердую физическую основу и защищено с практической стороны экспериментами, а с научной — теоремой Винера — Хинчина. Мы дадим отличающуюся от классической математическую интерпретацию спектра — ту, которая логично вытекает из наших построений для стационарного непрерывного процесса.

Понятие спектра так или иначе предполагает бесконечное время, поэтому пусть процесс задан на $[0, T]$ и $T \rightarrow \infty$. Считаем $MX_t = 0$. Спектральный двойник $\dot{X}_{\omega, T}$, рассматриваемый при каждом фиксированном ω как последовательность индексированных параметром T случайных величин, при $T \rightarrow \infty$ не является скв-сходящимся ни к какой предельной случайной величине; скв-предела не существует. Но это не столь важно. Важно то, что для стационарных процессов «перекрестные» корреляции между разными частотами при $T \rightarrow \infty$ стремятся к 0, а именно, верно следующее:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} M(\dot{X}_{\omega, T} \dot{X}_{\omega', T}^*) = 2 \underline{B}(\omega) \delta_0(\omega - \omega');$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{M}(\dot{X}_{\omega, T} \dot{X}_{\omega', T}^*) = 2 \overline{B}(\omega) \delta_0(\omega - \omega'),$$

где $\underline{B}(\omega) = \inf_{b \in \mathfrak{B}} 2 \int_0^\infty b(\tau) \cos \omega \tau d\tau$, $\overline{B}(\omega) = \sup_{b \in \mathfrak{B}} 2 \int_0^\infty b(\tau) \cos \omega \tau d\tau$, а $\delta_0(\omega - \omega')$ есть 1 при $\omega = \omega'$, иначе 0. Отсюда видно, что к нулю стремится корреляция между действительной и мнимой частями спектрального двойника.

Обозначим $\dot{X}_\omega$ процесс, обладающий предельными при $T \rightarrow \infty$ корреляционными свойствами процесса $\dot{X}_{\omega, T}$, и назовем его *спектральным процессом*. Согласно написанным выше соотношениям для спектрального процесса имеем следующие определяющие его равенства:

$$M X_\omega^c X_{\omega'}^c = M X_\omega^s X_{\omega'}^s = M X_\omega^c X_{\omega'}^s = M X_\omega^s X_{\omega'}^c = 0, \omega \neq \omega'. \quad (4.12)$$

Корреляционные свойства $\dot{X}_\omega$, с учетом (4.12) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \overline{M} [\sum c_i (X_{\omega_i}^c)^2 + \sum d_j (X_{\omega_j}^s)^2] = \\ = \sup_{B(\omega)} [\sum c_i B(\omega_i) + \sum d_j B(\omega_j)], \end{aligned}$$

где $B(\omega)$ способствуют собственному семейству ковариаций. Отсюда

$$\overline{M} [(X_\omega^c)^2 - (X_\omega^s)^2] = \underline{M} [(X_\omega^c)^2 - (X_\omega^s)^2] = 0. \quad (4.13)$$

Из полученных уравнений видно, что для задания модели спектрального процесса достаточно задать либо $\overline{M} \sum c_i (X_{\omega_i}^c)^2$, либо $\overline{M} \sum c_i (X_{\omega_i}^s)^2$, либо

$$\overline{M} \sum c_i |\dot{X}_{\omega_i}|^2 = \sup_{B(\omega)} \sum c_i B(\omega_i), \quad \forall \omega_i. \quad (4.14)$$

Доказано такое утверждение.

Спектральный двойник $\dot{X}_{\omega, T}$ скв-непрерывного стационарного в широком смысле процесса X_t с нулевым средним при $T \rightarrow \infty$ ИМ-сходится в направлении корреляционных свойств к спектральному процессу $\dot{X}_\omega$, заданному первичными значениями (4.12), (4.13), (4.14).

Констатируемая утверждением сходимости является необходимым условием стационарности в широком смысле скв-непрерывного процесса. Но не достаточным, так как спектральный двойник процесса, являющегося нестационарным лишь в некоторой локальной области времени (пример: $X_t = m_t + \xi_t$, где ξ_t стационарен, а m_t — любой урезанный вне фиксированного интервала процесс: $m_t = 0$ при $|t| > T_0$) и стационарным на остальной временной оси, также будет сходиться к $\dot{X}_\omega$.

Необходимо отметить, что спектральный процесс $\dot{X}_\omega$, определенный первичными значениями (4.12) — (4.14), в общем, не имеет аналога во временной оси, поэтому его нужно рассматривать как: 1) способ задания предельных (при $T \rightarrow \infty$) корреляционных

свойств исходного стационарного в широком смысле процесса X_t ; 2) самостоятельный способ задания не существующих, но удобных в каком-то смысле процессов (как белого шума, для которого $B(\omega) = \text{const}$ и для которого аналогов во времени даже в предельном смысле нет).

Одним из основных достоинств перехода к спектральному процессу является простота и наглядность его пересчета при однородных линейных преобразованиях, о чем речь в следующем параграфе.

4.4. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЦЕССА

Гладкость преобразований и непрерывность процессов. *Линейными* называются преобразования вида

$$Y_t = \int_0^T h(t, \tau) X_\tau d\tau, \quad (4.15)$$

где $h(t, \tau)$ — импульсный отклик фильтра, т. е. его реакция на дельта-скачок на входе в момент t ; Y_t — процесс на выходе, если на вход поступает X_t . Считается, что реализации процесса интегрируемы с весом $h(t, \tau)$.

Многие процессы обязаны своему виду и свойствами линейным преобразованиям, вызванным характерной для систем наблюдений и измерений инерционностью среды, устройств и звеньев. И чем больше инерционность фильтрующей системы, чем медленнее меняется $h(t, \tau)$ по τ , тем плавнее, глаже будут пропускаемые на ее выход реализации Y_t в силу способности такой системы нивелировать скачки и быстрые колебания входного процесса. Сказанное подтверждается неравенством

$$|Y_{t+\Delta t} - Y_t| = \left| \int_0^T [h(t+\Delta t, \tau) - h(t, \tau)] X_\tau d\tau \right| \leqslant \\ \leqslant (\max_\tau |X_\tau|) \int_0^T |h(t+\Delta t, \tau) - h(t, \tau)| d\tau,$$

из которого видно, что при ограниченном входном процессе $\max |X_\tau| \leqslant H$ скорость изменения выходного за промежуток Δt определяется тем, насколько отклик фильтра изменится, если дельта-скачок на входе сдвинуть по времени на Δt .

Поделив обе части на Δt и устремив к нулю, получим неравенство для производной

$$|dY_t/dt| \leqslant (\max |X_t|) \int_0^T |dh(t, \tau)/dt| d\tau.$$

Такое же неравенство верно и для старших производных.

Расчет выхода фильтра. Расчет модели процесса Y_t , определяемого в (4.15), производится строго по общей методике § 2.1. Сначала выявляются h -представимые признаки входного процес-

са, т. е. записываемые в виде функционалов $g\{\int h(t, \tau) X_\tau d\tau\} = gh\{X\}$. Для них рассчитываются средние $\bar{M}gh\{X\}$, и они же напрямую переносятся на аналогичные средние $\bar{M}g\{Y\}$ процесса Y_t , в совокупности своей и определяющие его модель.

Проследим этот путь на примере входного процесса второго порядка. Первичными для него являются средние линейно-квадратичных признаков, записанные в интегральном виде

$$\bar{M}[\int c_t^{(k)} X_t dt + \iint X_t D_{t,t'}^{(k)} X_{t'} dt dt'] = \bar{m}_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

или сокращенно для левой части: $\bar{M}(c^{(k)}, D^{(k)}) = m_k$, k — номер первичного признака. Первичные значения и определяют по формуле согласования и продолжения средние от любых пар $\bar{M}(c, D)$, составляющих все вместе корреляционные свойства. Из них h -представимые признаки, т. е. допускающие запись

$$c_t = \int h(t, \tau) e_\tau d\tau, \quad D_{t,t'} = \iint h(t, \tau) H_{\tau,\tau'} h(t', \tau') d\tau d\tau'$$

или сокращенно (по аналогии с векторной формой) $(c, D) = (he, hHh)$, определяют модель выходного процесса своими средними

$$\bar{M}^Y(e, H) = \bar{M}^X(c, D).$$

Напрашиваются следующие выводы.

1. При линейных преобразованиях процессы второго порядка переходят также в процессы второго порядка, т. е. корреляционные свойства в корреляционные свойства.

2. Если все первичные признаки входного процесса второго порядка h -представимы, т. е. $(c^{(k)}, D^{(k)}) = (he^{(k)}, hH^{(k)}h)$, $k = 1, 2, \dots$, то первичными для выходного процесса будут $(e^{(k)}, H^{(k)})$ с теми же средними. Тогда входной и выходной процессы будут подобными.

3. Если преобразование обратимо в смысле существования отклика $h^{-1}(t, \tau)$ обратного фильтра, определяемого уравнением

$$\int h(t, \tau) h^{-1}(t', \tau) d\tau = \delta(t - t'),$$

то преобразование наводит подобие между процессами X_t и Y_t , а первичными для Y_t будут признаки

$$e_t^{(k)} = \int h^{-1}(t, \tau) c_\tau^{(k)} d\tau,$$

$$H_{t,t'}^{(k)} = \iint h^{-1}(t, \tau) D_{\tau,\tau'}^{(k)} h^{-1}(t', \tau') d\tau d\tau'.$$

Линейные преобразования можно изучать с помощью подчиненно-аддитивного представления: $X_t = m_t + \xi_{t,m}$, где для процесса второго порядка слагаемые определяются собственными семействами средних $\mathfrak{M}$ и ковариаций $\mathfrak{B}_m$ (см. (4.6)). Тогда такое же представление будет иметь выходной процесс, записываемый

$$Y_t = \int h(t, \tau) m_\tau d\tau + \int h(t, \tau) \xi_{\tau,m} d\tau = n_t + \eta_{t,n}$$

и рассматриваемый как отдельное прохождение через фильтр

среднего и случайной добавки, что и определит нам собственное семейство средних $\mathfrak{M}$ и ковариаций $\mathfrak{K}_n$ на выходе:

$$\mathfrak{M} = \{n_t: n_t = \int h(t, \tau) m_\tau d\tau, m_\tau \in \mathfrak{M}\},$$

$$\mathfrak{K}_n = \{K_n(t, t') = \iint h(t, \tau) h(t', \tau') b(\tau, \tau') d\tau d\tau', b \in \mathfrak{B}_m\}.$$

Они и определяют полностью выходной процесс второго порядка, по ним могут быть рассчитаны корреляционные свойства. Но расчет легче дается использованием собственных семейств входного процесса, что и продемонстрируем на примере.

Пример 4.8. Расчет границ ковариации. Пусть $X_t = m_t + \xi_t$, где $M\xi_t = 0$ и ξ_t свободен от m_t , в результате чего $\mathfrak{B}_m = \mathfrak{B}$, $\forall m$. Пусть также отклик фильтра неотрицателен $h(t, \tau) \geq 0$. Тогда границы ковариаций выходного процесса рассчитываются как максимум по входным

$$\overline{K}(t, t') = \iint h(t, \tau) h(t', \tau') \overline{b}(\tau, \tau') d\tau d\tau'.$$

Пусть однородный процесс второго порядка (для него $\overline{b}(t, t') = \overline{b}(t-t')$), имеющий конечный интервал $\tau_{\text{кор}}$ корреляции (т. е. $\overline{b}(t-t') = 0$ при $|t-t'| > \tau_{\text{кор}}$), пропускается через инерционный фильтр такой, что отклик неотрицателен $h(t, \tau) \geq 0$ и как функция переменной τ мало меняется за $\tau_{\text{кор}}$: $h(t, \tau + \tau_{\text{кор}}) \approx h(t, \tau)$. Тогда границы ковариаций выходного процесса будут полностью приобретать черты линейного звена, как это видно из следующего выражения:

$$\begin{aligned} \overline{K}(t, t') &= \iint h(t, \tau) h(t', \tau + \Delta) \overline{b}(\Delta) d\tau d\Delta \approx \\ &\approx \int \overline{b}(\Delta) d\Delta \int h(t, \tau) h(t', \tau) d\tau = \overline{\gamma}^2 K_0(t, t'), \end{aligned}$$

где $K_0(t, t')$ определяется исключительно откликом фильтра. Можно было бы представить $Y_t = \gamma Y_t^0$, где множитель γ произволен в интервале $(\gamma, \overline{\gamma})$, а Y_t^0 имеет нулевое среднее и точную ковариацию $K_0(t, t')$. Однако это представление верно лишь для расчета границ ковариаций и отнюдь не означает, что собственное семейство сужается до $\gamma^2 K_0(t, \tau)$ (как это было бы, если бы входной процесс был стационарен).

Назовем *фильтр однородным*, если $h(t, \tau) = h(t-\tau)$, т. е. его реакция с точностью до сдвига одинакова вне зависимости от момента поступления входа. Нетрудно видеть, что *фильтрация однородного процесса второго порядка однородным фильтром снова ведет к однородному процессу*.

Линейное преобразование и представление стационарного процесса. Здесь считаем, что входной процесс стационарный второго порядка и $MX_t = 0$. Тогда собственные семейства составляют ковариации, зависящие только от разности аргументов: $b(t-t')$. Очевидно, что если фильтр однородный $h(t, \tau) = h(t-\tau)$, то и выходное множество ковариаций будет таким же, зависящим лишь от разности аргументов:

$$K(t-t') = \int h(t-\tau) h(t'-\tau) b(\tau-\tau') d\tau d\tau'.$$

Таким образом, процесс остается стационарным, если его пропустить через однородный фильтр.

Рассмотрим по образу и подобию примера 4.8 прохождение стационарного широкополосного процесса через узкополосный фильтр. Последнее подразумевает, что за интервал, на котором $b(\tau-\tau')$, принимают ненулевые значения, $h(t)$ меняется слабо, откуда получаем:

$$K(t-t') \simeq \int b(\Delta) d\Delta \int h(t-\tau) h(t'-\tau) d\tau = \gamma^2 K_0(t-t'). \quad (4.16)$$

Написанное позволяет следующим образом представить выходной процесс: $Y_t = \gamma Y_t^0$, где $MY_t^0 = 0$, $MY_t^0 Y_{t'}^0 = K_0(t-t')$ определяется исключительно фильтром, а входной процесс влияет лишь на множитель γ . В итоге выходной процесс имеет точную ковариацию, определяемую фильтром.

Сказанное особенно станет наглядным, если перейти от X_t к его предельному спектральному двойнику $\dot{X}_\omega$, смысл введения которого во многом и состоял в упрощении расчетов спектральных и, следовательно, корреляционных свойств выходного процесса. В самом деле, предельный спектральный двойник на выходе находится простым умножением входного на частотную характеристику фильтра:

$$\dot{Y}_\omega = \dot{H}_\omega \dot{X}_\omega, \quad \dot{H}_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \exp(j\omega\tau) d\tau.$$

Как и для всякого стационарного процесса, выходной спектральный процесс задается некоррелированностью его действительной и мнимой составляющих (4.12), равенством их мощностей (4.13), а его особенности (4.14) отражаются следующими корреляционными свойствами (записанными в интегральном виде):

$$\overline{M} \int_{-\infty}^{\infty} c_\omega |\dot{Y}_\omega|^2 d\omega = \overline{M} \int_{-\infty}^{\infty} c_\omega |\dot{H}_\omega|^2 |\dot{X}_\omega|^2 d\omega.$$

С позиций собственных ковариаций правая часть равна

$$2 \sup_{B(\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} c_\omega |\dot{H}_\omega|^2 B(\omega) d\omega,$$

где $B(\omega)$ — преобразование Фурье от $b(\tau)$ и супремум берется по соответствующим собственному семейству спектрам. Например, если X_t был определен границами $\overline{B}(\omega)$ энергетического спектра, то Y_t будет определен границами $|\dot{H}_\omega|^2 \overline{B}(\omega)$.

Нетрудно видеть, что если $B(\omega)$ — широкополосный спектр, а $|\dot{H}_\omega|$ — узок, то $|\dot{H}_\omega|^2 B(\omega) \simeq B(\omega_0) |\dot{H}_\omega|^2 = \gamma^2 |\dot{H}_\omega|$, где ω_0 — средняя частота «настройки» фильтра, т. е. выходные свойства определяются только видом фильтра с точностью до энергетического множителя.

Любой стационарный процесс второго порядка (с нулевым средним) может быть представлен как результат линейного преобразования некоторого «стандартного» процесса $Z(t)$, имеющего

заданный ненулевой при каждом ω спектр $B_0(\omega) > 0$, с помощью фильтра. В самом деле, выходной процесс будет определяться следующим семейством энергетических спектров:

$$\mathfrak{K}_\omega = \{K(\omega) = |\dot{H}_\omega|^2 B_0(\omega), \dot{H}_\omega \in \mathfrak{H}\},$$

и всегда можно подобрать такое множество $\mathfrak{H}$ частотных характеристик фильтра, чтобы получить заданное собственное семейство $\mathfrak{B}$.

Стандартным может быть любой формальный спектральный процесс $\dot{Z}_\omega$, заданный своим энергетическим спектром. В частном случае, если им является «белый шум»: $B_0(\omega) = b_0$, то $|\dot{H}_\omega|^2 = K(\omega)/b_0$ и тогда с точностью до постоянного коэффициента семейство $\mathfrak{B}_\omega$ идентично $\mathfrak{H}$. Отметим, что «белый шум» как спектральный процесс $\dot{Z}_\omega$ не только не имеет аналога во временной области, но не является в пределе спектральным двойником никакого реального процесса X_t . Однако он определен сам по себе в частотной области и дает удобную форму для представлений других процессов.

Узкополосные процессы. Получаются при фильтрации широкополосного стационарного процесса узкополосным фильтром, настроенным на среднюю частоту ω_0 . Импульсный отклик фильтра с узкой полосой частот пропускания записывается

$$h(t-t') = H(t-t') \cos[\omega_0(t-t') + \varphi],$$

где $H(\tau)$ — огибающая, медленно меняющаяся по сравнению с периодом $2\pi/\omega_0$ частоты настройки. Подстановка отклика в (4.16) убеждает, что все собственные выходные ковариации обязательно приближаются при сужении полосы фильтра к одному виду

$$K(\tau) \simeq \frac{1}{2} \gamma^2 \int H(t) H(t+\tau) dt \cos \omega_0 \tau = \gamma^2 K_0(\tau) \cos \omega_0 \tau,$$

включающему колебательный множитель. А поскольку точно таким же ковариациями обладает представление

$$Y_t = \eta_t^s \sin \omega_0 t + \eta_t^c \cos \omega_0 t,$$

где η_t^c и η_t^s , называемые когерентной и квадратурной составляющими процесса, некоррелированы, стационарны, имеют нулевые средние и ковариацию $\gamma^2 K_0(\tau)$ приходим к выводу, что любой узкополосный стационарный процесс в комплексной форме записывается

$$\dot{Y}_t = \dot{\eta}_t \exp(-j\omega_0 t), \quad \dot{\eta}_t = \eta_t^c + j\eta_t^s,$$

где $\dot{\eta}_t$ — комплексная огибающая процесса, а сам процесс Y_t равен действительной части $\dot{Y}_t$: $Y_t = \text{Re } \dot{Y}_t$. Такое представление широко используется в статистической радиотехнике и при обработке узкополосных сигналов.

При переходе к спектральным процессам указанная запись превращается в $\dot{Y}_\omega = \dot{\eta}_{\omega - \omega_0}$.

4.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Процесс — это явление, исходами которого являются реализации непрерывного времени. Современная теория знает разные подходы к описаниям случайных процессов. Самый общий, состоящий в задании процесса согласованными между собой многомерными распределениями вероятностей, оказывается сложным, неэффективным и трудноприменимым. Исключение, пожалуй, составляют нормальные процессы, и то из-за их близости к другому подходу — определению процесса его корреляционными свойствами. Корреляционный подход прост в понимании, полагается на физическую природу инерционности процессов, интерпретируется через спектр и находит широкое применение во всех областях. Еще один подход состоит в использовании функциональных преобразований стандартных процессов, обычно белого шума (так задаются диффузионные процессы), и занимает промежуточное положение между указанными двумя. Всем классическим подходам свойственны абсолютно завершенные по детализации конструкции: если известны вероятности, то вся совокупность, то же с корреляциями. Все же в самом существовании корреляционного подхода и его успехах усматривается тенденция вынужденного отхода от абсолюта в сторону упрощений, ибо корреляции суть лишь составная часть, толика всего необозримого арсенала вероятностных свойств.

Требование дальнейших упрощений вызывает необходимость открыть простор любым частичным, сокращенным описаниям, заданиям процесса его отдельными свойствами, и не обязательно в точном, а можно в размытом, интервальном виде. Незавершенные для классической теории, такие конструкции оказываются совершенно законченными и строгими, даже естественными, для интервальных моделей, где любые вероятности, корреляции, моменты (точные или интервальные) как фрагменты средних, если их принять за первичные, уже как-то определяют процесс, причем чем в меньшем числе, тем проще.

Сохранение обязательных, наиболее видимых, характерных черт и «забывание» всех второстепенных доводит сложность описаний процесса до уровня, мало отличающегося от моделей явлений с простыми исходами (типа дискретных и непрерывных случайных величин, последовательностей) и к ним нередко сводится. А для этого требуется направленный подбор признаков, которыми служат функционалы на пространстве реализаций, и задание их средних. Такими для импульсной помехи могут быть вероятности превышений одного или сетки уровней. Для процесса, рожденного инерционным устройством, характерными являются частично известные корреляции, интервал корреляции, свойства непрерывности реализаций и т. п. Любые желаемые черты при соответствующем навыке переводятся на язык первичных средних.

Новый подход требует пересмотра некоторых положений современной теории. Так, не всякий процесс записывается как сумма его среднего и остатка, а верны более общие аддитивные представления (конец § 4.1). Необычно определяется ковариация, если среднее интервально. Используются и известные приемы. Так, процесс, заданный корреляционными свойствами (второго порядка), представляется семействами точных собственных средних и ковариационных функций.

Упрощение структуры описаний может достигаться за счет неизменности свойств процесса во времени, что позволяет, задавая средние при одном начале отсчета, перенести их по сдвигу на все остальные, преумножая тем самым

число первичных данных. Сказанное охватывается понятием однородности процесса как инвариантности во времени внешнего облика в виде первичных средних, а отсюда и всех остальных. Значительно более тонким и сложным оказывается понятие стационарности как сохранность во времени внутренней, подчас незримой микроструктуры модели процесса.

Стационарность позволяет перенести процесс в спектральную область, и не столько перенести (так как это можно сделать и для других процессов), сколько выделить простые свойства спектра, особенно полезные в задачах стационарной фильтрации и при описании процессов через спектральные двойники. Спектральные описания в такой степени автономны, что позволяют задавать вырожденные процессы типа белого шума, не являющиеся ничьими двойниками, но крайне удобные для представлений свойств других, вполне реальных процессов.