Глава 3.
СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, СУММЫ

3.1. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Определения. Случайной величиной (с. в.) называется случайное явление, пространством элементарных исходов которого является числовая прямая $\mathscr{R}$ или ее часть.

Случайные величины обозначаются заглавными буквами X, Y, а соответствующие им совместные и частные модели — обычным образом: $\mathscr{M}^{XY}$, $\mathscr{M}^{X}$, $\mathscr{M}^{Y}$. Оператор $\overline{M}$ без индексов означает взятие верхнего среднего от следующих за ним с. в. (или их преобразований) по совместной их модели.

Арифметические действия между с. в., например $X+Y$, X/Y и т. д., означают соответствующие преобразования (сложение, деление и т. д.) на прямом произведении пространств их значений, т. е. $\mathscr{R}\times\mathscr{R}\to\mathscr{R}$, а отношения $X<Y$ или $X\in[a, b]$ есть соответствующие события на этом произведении. Вероятности событий есть средние от индикаторных функций, например $P(X<Y)$, $\overline{P}(a\leqslant X\leqslant b)$, или просто $\overline{P}[a, b]$, $\overline{P}(a, b)$ в зависимости от характера замкнутости отрезка.

В принципе, определение с. в. не исключает бесконечных ее значений $X=\infty$ (или $-\infty$).

Случайная величина называется *ограниченной*, если можно указать H такое, что $\overline{P}(|X|>H)=0$. Случайная величина называется *дискретной*, если на прямой можно выделить конечное или счетное множество $\mathscr{X}_0=\{a_1, a_2, \ldots\}$ чисел, образующих достоверное событие: $P(X\in\mathscr{X}_0)=\lim\limits_{k\to\infty}P(\bigcup\limits_1^k a_i)=1$. Оно и будет множеством значений с. в. X.

Случайная величина называется *непрерывной в точке* a, если вероятность любого отрезка, содержащего точку a, стремится к 0 при устремлении длины этого отрезка к 0, т. е. если независимо от порядка устремления ε_1 и ε_2 к 0 имеет место равенство

$$\lim_{\varepsilon_1,\,\varepsilon_2\downarrow 0}\overline{P}[a-\varepsilon_1,\ a+\varepsilon_2]=0.$$

Случайная величина непрерывна в бесконечно удаленных точках $\pm\infty$, если $\overline{P}(X=\pm\infty)=0$. Случайная величина непрерывная в каждой точке, включая бесконечные $\pm\infty$, называется *непрерывной.*

Задание с. в. X производится обычным образом первичными средними $\overline{M}g(X)$, $g\in\mathscr{G}$, которые продолжаются далее на любые функции, мажорируемые линейными комбинациями первичных и составляющими область существования $\mathscr{F}^X=\{f:\overline{M}f<\infty\}$. Минимальное число определяющих X элементов $\mathscr{G}$ создаст размерность модели.

Границы $\underline{M}X$, $\overline{M}X$, если они существуют (т. е. $\pm x\in\mathcal{F}^X$), называются верхним и нижним средними значениями самой с. в. X; $\underline{M}X^2$, $\overline{M}X^2$ — среднеквадратическими значениями, или нижней и верхней мощностью с. в. X.

Разберем различные отношения между с. в.

Включение $\mathcal{M}^X\supset\mathcal{M}^Y$ эквивалентно $\overline{M}f(X)\geqslant\overline{M}f(Y)$, $\forall f\in\mathcal{F}^X$, и $\mathcal{F}^X\subset\mathcal{F}^Y$; включение означает, что первично среднестатистических данных в X заложено меньше, чем в Y, или просто они менее точные. Для краткости иногда записываем $X\supset Y$ и говорим, что с. в. X шире (в среднестатистическом смысле), чем Y, или же X включает Y. Самой широкой среди всех является голая с. в. (она же голый параметр), о которой нет никаких данных. Это выход «черного ящика» полностью неизвестной структуры. Иногда выгодно так считать в целях упрощения, даже если кое-какие данные об X имеются.

Включение нужно отличать от неравенства $X\geqslant Y$, означающего, что X всегда будет принимать значение, не меньшее Y: $\underline{P}(X\geqslant Y)=1$. Неравенство, в частности, будет иметь место для двух признаков $X=f_1(\xi)$, $Y=f_2(\xi)$ одной и той же ξ, если один из них мажорирует другой: $f_1\geqslant f_2\Rightarrow X\geqslant Y$. Из $X\geqslant Y$ следует $\overline{M}f(Y)\geqslant\overline{M}f(X)$, но только для монотонно неубывающих функций f (в отличие от включения).

Для полноты картины укажем еще на отношение X больше Y в вероятностном смысле как тождественное неравенство: $\underline{P}(X>x)\geqslant\overline{P}(Y>x)$, $\forall x\in\mathcal{R}$, означающее, что вероятности превышений любых уровней x для с. в. X больше, чем для Y. Это самое слабое отношение упорядоченности с. в. среди введенных нами, называемое в литературе так: X стохастически больше Y.

Еще понадобится далее понятие симметрии. Случайная величина X называется *симметричной*, если среднее любой нечетной функции есть точный ноль: $Mf(X)=0$ при $f(-x)=-f(x)$, $f\in\mathcal{F}^X$. В частности, если X симметрична, то $M\sin uX=0$, $\forall u\in\mathcal{R}$, $MX^{2k+1}=0$ для тех k, для которых $x^{2k+1}\in\mathcal{F}^X$.

Детерминированные преобразования. Резюмируем применительно к с. в. результаты § 2.1, где изучались детерминированные преобразования явлений.

Пусть X задана своими средними $\overline{M}f(X)$, $f\in\mathcal{F}^X$. Преобразование $Y=s(X)$ одной с. в. в другую (а при $s\in\mathcal{F}^X$ с. в. Y будет одним из признаков с. в. X) ведет к модели $\mathcal{M}^Y$, средние которой, как это следует из записи: $\overline{M}\varphi(Y)=\overline{M}\varphi(s(X))$, составляют часть средних модели $\mathcal{M}^X$. А именно, из всего многообразия $\mathcal{F}^X$ выбираются только средние s-представимых признаков: $f(x)=\varphi(s(x))$. Их согласованность между собой очевидна и $\mathcal{F}^Y=\{\varphi:\varphi s\in\mathcal{F}^X\}$ — область существования $\mathcal{M}^Y$.

Если X задается набором $\mathcal{G}$ первичных признаков, то после ее преобразования в Y этот набор, в общем, распадается на все $\varphi(y)\in\mathcal{F}^Y$ — все они потенциально будут первичными для $\mathcal{M}^Y$, что равносильно росту размерности $\mathcal{M}^Y$ по сравнению с $\mathcal{M}^X$.

Кроме одного случая, когда все признаки набора $\mathcal{G}$ s-представимы, т. е. $g(x)=\psi_g(s(x))$, $\forall g\in\mathcal{G}$, и тогда признаки $\psi_g(y)$, $g\in\mathcal{G}$ будут первичными для $\mathcal{M}^Y$, размерности $\mathcal{M}^X$ и $\mathcal{M}^Y$ будут одинаковы, а X и Y будут подобными между собой ($s(x)$ — преобразование подобия). В этом случае по средним s-представимых признаков $\mathcal{M}^X$ восстанавливаются остальные.

Преобразование s будет ограниченным, если область $s\mathcal{X}$ значений $s(x)$ — ограниченное множество на $\mathcal{R}$. К ним относятся: гармонические преобразования $s_u(x)=\cos(ux)$ и $\sin(ux)$ (где u — индекс признака) с областью значений $s\mathcal{X}=[-1, 1]$, индикаторные $s(x)=A(x)$ со значениями 0 и 1 и т. д. Многие нужные преобразования не являются ограниченными. Наиболее распространенными из них считаются: тождественное преобразование x, для которого $s\mathcal{X}=\mathcal{R}$; квадратическое x^2, $s\mathcal{X}=\mathcal{R}^+$; логарифмическое $\ln x$, $x\in\mathcal{R}^+$, $s\mathcal{X}=\mathcal{R}$; показательное $\exp x$, $s\mathcal{X}=\mathcal{R}^+$; гиперболическое $1/x$, $s\mathcal{X}=\mathcal{R}$. В последнем случае в точке $x=0$ преобразование не определено, и если эта точка не является первичным событием для X, то ее полезно исключить из исходов этой с. в., что не приведет к видоизменению модели X, но зато позволит математически строго пользоваться этим преобразованием.

Нормальная случайная величина. Нормальная с. в. занимает особое положение, обязанное предельным теоремам. Мы рассмотрим ее с наших общих концепций, дав различную интерпретацию, а связанные с ней предельные теоремы будут рассмотрены через параграф уже после введения понятий сходимости.

Нормальной со средним m и дисперсией σ^2 называется с. в. Y, определенная продолжением (посредством интегрирования и (1.4)) нормальной плотности вероятностей (по отношению к мере-длине):

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\exp[-(x-m)^2/(2\sigma^2)]. \tag{3.1}$$

Первичным для нормальной с. в. является следующий набор вероятностей отрезков:

$$P(a,\ b)=\Phi\left(\frac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-m}{\sigma}\right),\quad a<b, \tag{3.2}$$

где $\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z\exp(-x^2/2)\,dx$ — функция Лапласа (она табулируется в учебниках и задачниках по теории вероятностей). Вероятности отрезков получаются интегрированием плотности в пределах от a до b, тогда как плотность получается из вероятностей как пределы их отношений к длинам отрезков при устремлении последних к 0.

Соответствующая нормальной с. в. модель обозначается $\mathcal{N}_{m,\sigma}$. Если свести ее к нулевому среднему и единичной дисперсии $\mathring{Y}=(Y-m)/\sigma$, то получим *стандартную нормальную с. в.*, соответствующую $\mathcal{N}_{0,1}$. Достаточно ее и рассматривать, так как любая другая к ней приводится согласно формуле $Y=m+\sigma\mathring{Y}$.

Область $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ существования точных средних для $\mathcal{N}_{0,1}$ составляют все интегрируемые с весом $\exp(-y^2/2)$ функции, для них

$$M f(\overset{\circ}{Y}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\exp(-y^2/2)\,dy,$$

где интеграл понимается в смысле Римана. В частности, для гармонических средних

$$M\cos u\overset{\circ}{Y} = \exp(-u^2/2), \quad M\sin u\overset{\circ}{Y} \equiv 0, \quad \forall u, \tag{3.3}$$

а для моментов

$$M(\overset{\circ}{Y})^{2k+1}=0,\quad M(\overset{\circ}{Y})^{2k} = (2k)!/(k!2^k),\quad k=1,\ 2,\ldots \tag{3.4}$$

Теорема 3.1 характеризации нормальной с.в. *Эквивалентными являются следующие способы задания* $\mathcal{N}_{0,1}$:

1°. *плотностью* (3.1) *при* $m=0$, $\sigma=1$;

2°. *первичными вероятностями* (3.2) *интервалов*;

3°. *гармоническими средними* (3.3), *принятыми за первичные и дополненными первичными вероятностями* $\tilde{P}(|\overset{\circ}{Y}|>H)$, *заданными достаточно произвольно, но в рамках следующего требования непротиворечивости*: $1-2\Phi(H)\leqslant \tilde{P}(|\overset{\circ}{Y}|>H) \underset{H\to\infty}{\to} 0$;

4°. *моментами* (3.4), *взятыми в качестве первичного набора*.

Действительно, первичным для $\mathcal{N}_{0,1}$ можно было бы считать любой плотный в множестве $\mathcal{F}_{\mathcal{N}}$ интегрируемых с весом $\exp(-y^2/2)$ функций класс, или его базис. Такими являются индикаторы интервалов в 2°, степенные функции в 4° и гармонические в 3°. Необходимость введения дополнительных первичных вероятностей в 3° вызвана тем, что гармонические функции образуют базис лишь при ограниченной области значений аргумента.

Случайная величина, описываемая в виде следующего семейства нормальных моделей:

$$\bigvee_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}}\ \bigvee_{\underline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\sigma}} \mathcal{N}_{m,\sigma} = \mathcal{N}_{\underline{m},\overline{m},\underline{\sigma},\overline{\sigma}},$$

называется *нормальной с интервальными средним* $\underline{m}$, $\overline{m}$ *и дисперсией* $\underline{\sigma}^2$, $\overline{\sigma}^2$. Объединение эквивалентно записи $Y=\sigma\overset{\circ}{Y}+m$, где $\overset{\circ}{Y}$ — стандартная нормальная с.в., свободная от m и σ, а m и σ принимают произвольные значения в отведенных им интервалах, что ведет к средним

$$\overline{M}f = \max_{\substack{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}\\ \underline{\sigma}\leqslant\sigma\leqslant\overline{\sigma}}} \overline{M}f(\sigma\overset{\circ}{Y}+m),\ \forall f\in\mathcal{F}_{\mathcal{N}}.$$

При бесконечных значениях $\underline{m}=-\infty$, $\overline{m}=\infty$ обозначаем $\mathcal{N}_{\underline{\sigma},\overline{\sigma}}$ и называем нормальной при неизвестном m и интервальном σ. Для

нее, как это находится из последней формулы, имеем

$$\overline{P}(a,\ b)=2\Phi\left(\frac{b-a}{2\underline{\sigma}}\right),\quad \underline{P}(a,\ b)=0.$$

Теми же будут вероятности, если $\overline{\sigma}$ не известна, тогда обозначаем $\mathcal{N}_{\underline{\sigma}}$, а если к тому же и $\underline{\sigma}$ не известна, т. е. $\underline{\sigma}=0$, то нормальная с.в. вырождается в голую.

Случайные последовательности. Способы описания с. в. непосредственно переносятся на случайные векторы $\mathbf{X}=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$, составленные из последовательности с.в. Не столь по форме, сколь по содержанию описания при этом усложняются. Нас будут интересовать здесь разные упрощения: такие способы, которые позволили бы по частным моделям $\mathcal{M}^{X_i}$ с.в. X_i составить совместную $\mathcal{M}_{\mathbf{X}}$. Для этого-то и нужны понятия независимости, свободы, нековариированности предыдущей главы.

Последовательность $X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n$ называется *последовательностью независимых с.в.*, если она полностью определена первичными средними вида

$$\overline{M}\prod_1^n f_i(X_i) = \overline{\prod_1^n M f_i(X_i)} = \max_{M^{(i)}=\overline{M}\text{ или }\underline{M}} \prod_1^n M^{(i)} f_i(X_i), \tag{3.5}$$

где справа стоит максимум по всевозможным сочетаниям произведений $\overline{M}f_i(X_i)$ и $\underline{M}f_i(X_i)$, причем все сомножители должны быть конечны (т. е. $\pm f_i\in\mathcal{F}^{X_i}$), чтобы правая часть была конечной. Это есть закон интервальной мультипликативности средних, положенный в основу независимости и независимого произведения с.в.

Для последовательности независимых с.в. справедливы следующие соотношения:

1. $\overline{M}\sum_1^n f_i(X_i) = \sum_1^n \overline{M}f_i(X_i)$.

2. $\overline{M}\prod_1^n f_i^+(X_i) = \prod_1^n \overline{M}f_i^+(X_i)$, $\underline{M}\prod_1^n f_i^+(X_i) = \prod_1^n \underline{M}f_i^+(X_i)$.

3. $\overline{M}\prod_1^k (X_i-\overline{M}X_i)\prod_{k+1}^n (X_i-\underline{M}X_i) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ нечетно},\\ \prod_1^n (\overline{M}X_i-\underline{M}X_i), & \text{если } k \text{ четно}. \end{cases}$$

$\underline{M}\prod_1^k (X_i-\overline{M}X_i)\prod_{k+1}^n (X_i-\underline{M}X_i) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } k \text{ четно},\\ -\prod_1^n (\overline{M}X_i-\underline{M}X_i), & \text{если } k \text{ нечетно}. \end{cases}$$

4. Независимость сохраняется при преобразованиях $Y_1 = f_1(X_1)$, $Y_2 = f_2(X_2)$, ..., $Y_n = f_n(X_n)$.

5. Независимыми будут функции от любых непересекающихся поднаборов последовательности $Y_1 = f_1(X_1, \ldots, X_k)$, $Y_2 = f_2(X_{k+1}, \ldots, X_n)$.

6 При $i \neq j$

$$\overline{M}(X_i - \underline{M}X_i)(X_j - \overline{M}X_j) = \overline{M}(X_i - \overline{M}X_i)(X_j - \underline{M}X_j) =$$
$$= \underline{M}(X_i - \overline{M}X_i)(X_j - \overline{M}X_j) = \underline{M}(X_i - \underline{M}X_i)(X_j - \underline{M}X_j) = 0. \quad (3.6)$$

Последовательность, удовлетворяющая свойству 6, называется *нековариированной.*

Последовательность называется *некоррелированной*, если $MX_iX_j = 0$, $i \neq j$. При нулевых средних $MX_i = 0$ понятия нековариированности и некоррелированности совпадают. Отметим, что если $X_i = m + \xi_i$ и ξ_i некоррелированы и имеют нулевые средние $M\xi_i = 0$, то при неизвестном параметре m с. в. X_i не будут нековариированными, а будут подчиненно (при каждом заданном m) нековариированными.

Последовательность называется *свободной*, если она определена произведением частных $\mathscr{M}^{X_1}\mathscr{M}^{X_2}\ldots\mathscr{M}^{X_n}$, что соответствует следующему порядку вычислений средних: $\overline{M}f(X_1, \ldots, X_n) = \overline{M}^{X_1}(\overline{M}^{X_2}(\ldots(\overline{M}^{X_n}f(X_1, \ldots, X_n))\ldots))$.

Для свободных последовательностей каждое последующее значение X_i представляется как случайное преобразование предыдущих $X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}$, причем структура этого преобразования не известна, а известна лишь частная $\mathscr{M}^{X_i}$. Для свободных последовательностей остаются справедливыми свойства 1 и 2.

Свойство свободы теряется при перестановках последовательности, в отличие от свойств независимости и нековариированности. Подчеркнем еще раз, что все указанные нами способы задания последовательности объединены тем, что требуют лишь знания частных ИМ элементов X_i с указанием характера взаимодействия X_i.

Еще одним способом будет, когда это взаимодействие не указано, а заданы лишь частные $\mathscr{M}^{X_i}$ (см. пример 2.9). Тогда средние разделенных по переменным признаков $\overline{M}g(X_i)$, $g \in \mathscr{G}_i$, первичные для отдельных с. в., образуют первичный набор совместной модели (отсюда следует соответствующий формуле продолжения способ вычисления совместных средних). На суммах разделенных признаков выполняется свойство 1 аддитивности.

При одинаковых частных моделях независимость X_i приводит к наиболее узкой среди остальных совместной модели, а последний случай полностью неизвестных связей между X_i — к самой широкой.

Однородность и стационарность последовательности. Последовательность называется **однородной**, если ее совместная ИМ не меняется при циклических сдвигах элементов, т. е. для однородной последовательности вектора $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ и $S_k\mathbf{X} = (X_k, \ldots, X_n,$

15

$X_1, X_2, \ldots, X_{k-1})$, отличающиеся циклической перестановкой элементов, имеют одинаковые совместные ИМ: $\mathscr{M}^{\mathbf{X}} = \mathscr{M}^{S_k\mathbf{X}}$. Тем более одинаковыми должны быть частные модели $\mathscr{M}^{X_1} = \ldots = \mathscr{M}^{X_n}$. Однородность эквивалентна равенству средних при сдвигах:

$$\overline{M}f(\mathbf{X}) = \overline{M}f(\mathbf{S}_k\mathbf{X}), \quad \forall f \in \mathscr{F}.$$

Однородной будет независимая последовательность, элементы которой заданы одинаковыми частными ИМ. Или нековариированная, если только определяющие ее равенства (3.6) являются первичными средними совместной ИМ. Свободная последовательность даже при совпадении частных моделей не может быть однородной, так как свойство свободы не является равноправным к перестановкам.

Однородность отражает внешнюю симметрию статистических данных к циклическим сдвигам, наделяя ею ИМ. Более тонким является понятие стационарности. Признак $f(\mathbf{X})$ называется *стационарным* к циклическим сдвигам $\mathbf{S}_k$ последовательности $\mathbf{X}$, если

$$M[f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{S}_k\mathbf{X})] = 0, \quad \forall \mathbf{S}_k.$$

Последовательность $\mathbf{X}$ называется *стационарной,* если стационарны любые признаки $f \in \mathscr{F}$ из области существования средних. Важно, что в определении стационарности M — точное среднее.

Следствия стационарности последовательности. 1. Для всех частных признаков из области существования $M[f(X_i) - f(X_j)] = 0$, $\forall i, j$ (очевидно, так как частные признаки принадлежат $\mathscr{F}^X$). 2. Из стационарности следует однородность. В самом деле $\overline{M}f(S_k\mathbf{X}) = \overline{M}[f(S_k\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}) + f(\mathbf{X})] = M[f(S_k\mathbf{X}) - f(\mathbf{X})] + \overline{M}f(\mathbf{X}) = \overline{M}f(\mathbf{X})$. 3. Если бы среднее $Mf(\mathbf{X})$ какого-то признака стало бы вдруг точно известным, то таким же оно оказалось бы при любых циклических сдвигах последовательности: $\overline{M}_{Mf(\mathbf{X})}f(S_k\mathbf{X}) = Mf(\mathbf{X})$, где слева — среднее по сечению модели.

Стационарность последовательности как род статистической ее устойчивости (отсюда и точные M) вкладывается во внутреннюю симметрию ИМ и проявляется в абсолютной взаимной подчиненности средних (следствие 3). Стационарность обязана на практике неизменности во времени условий генерации элементов X_i. При стационарности даже голые частные модели не делают совместную голой. Например, пусть последовательность независима, т. е. определяется равенствами (3.5), и стационарна. С классических позиций имеем независимую одинаково распределенную выборку с неизвестными распределениями вероятностей элементов. Это отнюдь не голая модель, так как стационарность есть уже весьма существенные знания. Мы увидим в последней главе, как стационарность облегчает оценку средних частных признаков по длинному ряду наблюдений.

Обобщения. 1. Если стационарными являются не все признаки, а только набора $\mathscr{Q}$, то последовательность называется $\mathscr{Q}$-стационарной. Стационарными будем называть и соответствующие признакам $q \in Q$ параметры Mq (это не средние модели, а направления их сечения). Так можно говорить о стационарности среднего MX (соответствует стационарному признаку X), среднеквадратического MX^2, набора вероятностей и т. д.

2. Обобщением будет определение стационарности не к сдвигам, а к какой-то другой группе операторов $\mathbf{S}_k$, например группе всех перестановок. Оба обобщения относятся и к однородности.

3. Свойство стационарности модели эквивалентно в некотором смысле свойству главной диагонали: сечение ее по одной координате определит точно такие же значения всех других.

Зависимые последовательности. Выше уже обсуждалась возможность задания последовательности частными моделями ее элементов. На том же принципе базируется задание последовательности упрощенными совместными моделями (например, только соседних элементов), отражающими их связь между собой. Так, задавая корреляции соседних элементов $\underline{M}X_iX_{i+1}=\underline{b}$, $\overline{M}X_iX_{i+1}=\overline{b}$, $i=1, 2, \ldots$, получаем, если больше ничего не известно, модель однородной последовательности, для которой корреляции и будут ее первичными значениями. А в общем, заданными могут быть средние $\overline{M}f(X_i, X_{i+1}, \ldots, X_{i+k})$ функций не одного и двух, а любого числа элементов, характеризуя тем самым зависимость не только соседних элементов, но и через один, через два и т. д. элементов.

Определенные упрощения дает здесь допущение об однородности, позволяющее средние для какого-либо одного фрагмента последовательности сразу переносить на любые их циклические сдвиги.

Для задания зависимых последовательностей одна из упрощающих возможностей состоит в выражении ее через более простую, в частности, независимую последовательность ξ. Это будет функциональным представлением вида $\mathbf{X}=\mathbf{v}(\xi)$, одной из форм которой является *рекуррентное представление* любого из двух видов:

$$X_i = v_i(\xi_i, \xi_{i-1}, \ldots, \xi_1),\ X_i = w_i(\xi_i, X_{i-1}, \ldots, X_1),$$

где v_i и w_i — детерминированные преобразования. Второе представление является частью первого, что будет ясно, если последовательно выразить из $X_1=v_1(\xi_1)$ значение $\xi_1=v_1^{-1}(X_1)$, подставить его в $X_2=v_2(\xi_2, \xi_1)$, из которого снова выразить ξ_2 через X_2 и X_1 и т. д.

Рекуррентное представление:

$$X_i = w_i(\xi_i, X_{i-1}, \ldots, X_{i-k}),\ i=1, 2, \ldots,$$

где ξ_i независимы, называется *k-связным марковским.* Односвязное марковское представление $X_i=w_i(\xi_i, X_{i-1})$ есть способ отражения инерционности значений последовательности и может порождаться как самой физической природой, так и диктоваться удобством, экономностью, подчас привычностью. При интервальных моделях ξ_i марковское представление (впрочем как и другие) делается универсальным: оно достижимо расширением ИМ

ξ_i как средством добиться адекватности выбранного нами описания $\mathscr{M}_{\text{марк}}$ реальному $\mathscr{M}$, понимая под адекватностью включение: $\mathscr{M}_{\text{марк}} \supset \mathscr{M}$.

3.2. СХОДИМОСТИ

Неравенства для случайных величин. Пусть X и Y — две случайные величины. Неважно, как они связываются между собой; например, это могут быть два признака $X=f_1(\xi)$, $Y=f_2(\xi)$ некоторой одной с. в. ξ, или же совершенно разные с. в. последовательности. Справедливы следующие аналоги классических неравенств:

1) Гельдера. При $r>1$ и $1/r+1/s=1$:

$$\overline{M}XY \leqslant (\overline{M}|X|^r)^{1/r}(\overline{M}|Y|^s)^{1/s},\ \underline{M}XY \leqslant (\underline{M}|X|^r)^{1/r}(\overline{M}|Y|\ )^{1/s}.$$

2) Минковского. При $r \geqslant 1$:

$$(\overline{M}|X+Y|^r)^{1/r} \leqslant (\overline{M}|X|^r)^{1/r} + (\overline{M}|Y|^r)^{1/r},$$

а при $0<r<1$

$$\overline{M}|X+Y|^r \leqslant \overline{M}|X|^r + \overline{M}|Y|^r, \quad \underline{M}|X+Y|^r \leqslant \underline{M}|X|^r + \overline{M}|Y|^r.$$

3) Шварца — Буняковского:

$$(\overline{M}|X+Y|^2)^{1/2} \leqslant (\overline{M}X^2)^{1/2} + (\overline{M}Y^2)^{1/2}.$$

4) Маркова. При $r>0$, $a>0$:

$$\underline{P}(|X|>a) \leqslant \underline{M}|X|^r/a^r, \quad \overline{P}(|X|>a) \leqslant \overline{M}|X|^r/a^r.$$

5) Чебышева:

$$\underline{P}(|X| \geqslant a) \leqslant \underline{M}X^2/a^2, \quad \overline{P}(|X|>a) \leqslant \overline{M}X^2/a^2.$$

6) Йенсена. Если $\psi(x)$ выпукла и имеет производную, то

$$\overline{M}\psi(X) \geqslant \psi(\overline{M}X),\ \overline{M}\psi(X) \geqslant \psi(\underline{M}X).$$

7) Элементарные неравенства

$$\overline{M}|X+Y|^r \leqslant c_r\overline{M}|X|^r + c_r\overline{M}|Y|^r,$$

$$\underline{M}|X+Y|^r \leqslant c_r\underline{M}|X|^r + c_r\overline{M}|Y|^r,$$

где $c_r=1$ при $r \leqslant 1$ и $c_r=2^{r-1}$ при $r \geqslant 1$.

При точных средних эти неравенства переходят в классические.

Доказательство неравенств. 1. Первая формула следует из элементарного неравенства $ab \leqslant |a|^r/r+|b|^s/s$, если заменить в нем сначала a на $X/(\overline{M}|X|^r)^{1/r}$, а b — на $Y'=Y/(\overline{M}|Y|^s)^{1/s}$ и взять верхнее среднее от обеих частей, используя свойство полуаддитивности. Вторая формула получается в отличие от первой заменой a на $X'=X/(\underline{M}|X|^r)^{1/r}$, после чего используется неравенство: $\underline{M}(|X'|^r+|Y'|^s)\leqslant\underline{M}|X'|^r+\overline{M}|Y'|^s$. Случаи $\overline{M}|X|^r=0$, $\overline{M}|Y|^s=0$ исключаются, так как при этом неравенства становятся тривиальными.

2. Первое из неравенств Минковского доказывается по классической схеме [20, с. 50] из неравенства Гельдера, а вторые два являются следствиями элементарного неравенства: $|a+b|^r\leqslant|a|^r+|b|^r$, $0\leqslant r\leqslant 1$, при $a=X$, $b=Y$.

3. Есть частный случай первого неравенства Минковского при $r=2$.

4. Следует из того, что индикаторы полуотрезков $(-\infty, -a]$, $[a, \infty)$ суть два единичных уступа, простирающиеся от точек $-a$ и a в противоположные стороны, меньшие функции $|x|^r/a^r$.

5. Есть частный случай неравенства Маркова при $r=2$.

6. Доказательство стандартно [20].

7. Следует из неравенства $|a+b|^r\leqslant c_r|a|^r+c_r|b|^r$.

Сходимость моделей. Здесь рассматривается сходимость частных ИМ $\mathcal{M}^{X_n}$ последовательности X_n при $n\to\infty$ к частной ИМ $\mathcal{M}^X$ с.в. X, в смысле сходимости средних $\overline{M}f(X_n)$ к $\overline{M}f(X)$. Обозначим: $\mathcal{F}^{X_n}$ и $\mathcal{F}^X$ — области существования для $\mathcal{M}^{X_n}$ и $\mathcal{M}^X$.

Последовательность с. в. X_n называется:

а) *ИМ-сходящейся* к X *в направлении класса* $\mathcal{H}$ *признаков*, что обозначается $\overline{M}\mathcal{H}(X_n)\to\overline{M}\mathcal{H}(X)$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{M}h(X_n)=\overline{M}h(X)$, $\forall h\in\mathcal{H}$;

б) *ИМ-сходящейся к* X: $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{M}^{X_n}=\mathcal{M}^X$, если $\mathcal{F}^{X_n}=\mathcal{F}^X$ и ИМ-сходимость имеет место в направлении всех признаков из $\mathcal{F}^X$;

в) *ИМ-сходящейся* в X: $\lim\mathcal{M}^{X_n}\subset\mathcal{M}^X$, если $\lim\overline{M}f(X_n)\leqslant\leqslant\overline{M}f(X)$, $\forall f\in\mathcal{F}^X$.

Если пределы средних не существуют, то в определениях они заменяются на $\overline{\lim}=\lim\sup$.

Теорема 3.2. *Для ИМ-сходимости* X_n в X *достаточно ИМ-сходимости в направлении набора* $\mathcal{G}^X$ *первичных признаков с. в.* X:

$$\overline{M}g(X_n)\to\overline{M}g(X),\ \forall g\in G^X\Rightarrow\lim\mathcal{M}^{X_n}\subset\mathcal{M}^X.$$

Доказательство. Пусть $f\in\mathcal{F}^X$. Согласно следствию теоремы 1.1 каждому заданному $\varepsilon>0$ можно указать такую конечную линейную комбинацию $g_\varepsilon=c+\sum c^+{}_i g_i$, что $g_\varepsilon(x)\geqslant f(x)$ и $\overline{M}g_\varepsilon-\overline{M}f\leqslant\varepsilon/2$, где $\overline{M}g_\varepsilon=c+\sum c^+{}_i Mg_i$, $g_i\in\mathcal{G}^X$. В силу сходимости первичных значений будут сходиться $\overline{M}g_\varepsilon(X_n)\to\overline{M}g_\varepsilon(X)$, откуда можно указать такое n_ε, что $|\overline{M}g_\varepsilon(X_n)-\overline{M}g_\varepsilon(X)|\leqslant\varepsilon/2$ при $n>n_\varepsilon$. В результате объединения двух неравенств и $g_\varepsilon\geqslant f$ имеем $\overline{M}f(X_n)\leqslant\overline{M}g_\varepsilon(X_n)\leqslant\leqslant|\overline{M}g_\varepsilon(X_n)-\overline{M}g_\varepsilon(X)|+\overline{M}g_\varepsilon(X)\leqslant\overline{M}f+\varepsilon$ при $n>n_\varepsilon$. Отсюда $\lim\overline{M}f(X_n)\leqslant\leqslant\overline{M}f+\varepsilon$. Произвольность ε доказывает требуемое неравенство определения в). При $f\notin\mathcal{F}^X$ результат тривиален, что и требовалось доказать.

Следствие. *Если* $\mathcal{M}^X{}_n\supset\mathcal{M}^X$ *для всех* n, *то для ИМ-сходимости* X_n к X (*т. е.* $\lim\mathcal{M}^X{}_n=\mathcal{M}^X$) *достаточно ИМ-сходимости в направлении набора* $\mathcal{G}^X$ *первичных признаков с. в.* X.

Случайная величина X называется *дескриптивной*, если существует последовательность $X_{(k)}$, $k=1, 2, \ldots$, *случайных величин*, описываемых конечным числом k первичных значений, при $k\to\infty$ ИМ-сходящаяся к X. Дескриптивность эквивалентна существованию последовательности $\mathcal{G}^X{}_{(k)}=\{g_1, \ldots, g_k\}$ наборов, таких что $\lim\limits_{k\to\infty}\langle\overline{M}\mathcal{G}^X{}_{(k)}\rangle=\mathcal{M}^X$, где $\langle\overline{M}\mathcal{G}^X{}_{(k)}\rangle$ есть $\mathcal{G}^X{}_{(k)}$-расширение $\mathcal{M}^X$ (получаемое, если первичными оставить $\overline{M}g_i=\overline{M}g_i(X)$, $g_i\in\mathcal{G}_{(k)}$).

Дескриптивность — это возможность аппроксимировать модель с. в. X сколь угодно точно конечным числом данных о ней в виде набора средних ее признаков или первичных средних, это гарантия того, что при увеличении k для любого признака f (из области существования $\mathcal{F}^X$) среднее аппроксимирующей модели конечного порядка k будет сходиться к аппроксимируемому: $\lim\limits_{k\to\infty}\overline{M}f(X_{(k)})=\overline{M}f(X)$, $\forall f\in\mathcal{F}^X$.

В частности, дескриптивной будет с. в., определенная точными первичными вероятностями отрезков $P(x, x+\Delta x)$, если плотность $p(x)$ существует и ограничена. Для такой с. в. $\mathcal{G}_{(k)}$ образуют деления ограниченного отрезка $[-H, H]$ на k частей с устремлением длины каждого деления к 0, а H — к ∞.

Последовательность X_n называется *дескриптивной*, если существуют конечные наборы $\mathcal{G}_{(k)}$, такие что равномерно по n:

$$\lim\ \langle\overline{M}\mathcal{G}^{X_n}_{(k)}\rangle=\langle\overline{M}\mathcal{F}^{X_n}\rangle.$$

Теорема 3.3. *Если последовательность* $X_1, X_2, \ldots$ *и с. в.* X *дескриптивны, то для ИМ-сходимости* X_n *к* X *достаточно ИМ-сходимости в направлении объединения наборов первичных средних с. в.* X_n, $n=1, 2, \ldots$, *и* X.

Доказательство. В силу дескриптивности, каждой $f\in\mathcal{F}^X$ и заданному $\varepsilon>0$ можно указать такое k_ε и такую $g_{\varepsilon,k}\in\mathcal{L}+\mathcal{G}_{(k)}$, что $g_{\varepsilon,k}(x)\geqslant f(x)$ и $\overline{M}g_{\varepsilon,k}(X)-\overline{M}f(X)\leqslant\varepsilon$, $\overline{M}g_{\varepsilon,k}(X_n)-\overline{M}f(X_n)\leqslant\varepsilon$ при $\forall k>k_\varepsilon$. Отсюда $|\overline{M}f(X_n)-\overline{M}f(X)|\leqslant|\overline{M}f(X_n)-\overline{M}g_{\varepsilon,k}(X_n)|+|\overline{M}g_{\varepsilon,k}(X_n)-Mg_{\varepsilon,k}(X)|+|Mg_{\varepsilon,k}(X)-\overline{M}f(X)|\leqslant 2\varepsilon+|\overline{M}g_{\varepsilon,k}(X_n)-\overline{M}g_{\varepsilon,k}(X)|$. Подподнаборы $\mathcal{G}_{(k)}$ всегда можно считать подмножествами объединения $\mathcal{G}=\bigcup\limits_n\mathcal{G}^{X_n}$ первичных наборов. Сходимость средних на $\mathcal{G}_{(k)}$ будет вызывать сходимость на $\mathcal{L}+\mathcal{G}_{(k)}$, поэтому последнее слагаемое правой части неравенства стремится при $n\to\infty$ к 0. Произвольность ε доказывает сходимость $\lim\overline{M}f(X_n)=\overline{M}f(X)$, что и требовалось.

Условия теоремы 3.3 будут выполнены, если выполняется любое из следующих условий: а) X_n заданы ограниченными плотностями $p_n(x)$, ненулевыми лишь на конечном отрезке и сходящимися к плотности $p(x)$ с. в. X; б) X_n определены интервальными плотностями $\underline{p}_n(x)$, $\overline{p}_n(x)$ (определяющими вероятности отрезков $\underline{P}(x, y)$, $\overline{P}(x, y)$, $x\leqslant y$), сходящимися соответственно к $\underline{p}(x)$, $\overline{p}(x)$; в) X_n определены функциями распределения $\underline{F}_n(z)=\underline{P}(X_n<z)$, $\overline{F}_n(z)=\overline{P}(X_n<z)$, сходящимися к $\underline{F}(z)=\underline{P}(X<z)$, $\overline{F}(z)=\overline{P}(X<z)$.

Сходимость случайных величин и сходимость их моделей. Будем говорить, что X_n сходится к X *в среднеквадратическом* (скв-сходится) и писать $X_n\xrightarrow{2}X$, если $\lim\overline{M}(X_n-X)^2=0$. Смысл скв-сходимости в том, что при увеличении n значения элементов последовательности X_n все ближе повторяют значения с. в. X, в пределе равняясь им. Скв-сходимость: 1) определена относительно совместных ИМ $\mathscr{M}^{X_n X}$, 2) требует, чтобы признаки $(x_n - x)^2$ принадлежали областям существования средних совместных ИМ (в этом недостаток скв-сходимости), откуда следует $x^2_n \in \mathscr{F}^{X_n}$, $x^2 \in \mathscr{F}^X$; 3) вынуждает определенную сходимость частных $\mathscr{M}^{X_n}$ к $\mathscr{M}^X$ (ИМ-сходимость).

Заострим внимание на последнем факте. Обозначим $\mathscr{H}_m$ — класс непрерывных в точке m функций, таких, для которых

$$\sup_{x \in \mathscr{R}} f(x)/x^2 < \infty, \tag{3.7}$$

т. е. имеющих скорость роста при увеличении $|x|$ не быстрее x^2. Пусть $\mathscr{H} = \bigcap\limits_{\forall m} \mathscr{H}_m$ — класс непрерывных на всей $\mathscr{R}$ функций со свойствами (3.7).

Теорема 3.4. *Из скв-сходимости X_n к X следует ИМ-сходимость на классе $\mathscr{H}$ признаков*:

$$X_n \xrightarrow{2} X \Rightarrow \overline{M} f(X_n) \to \overline{M} f(X), \ \forall f \in \mathscr{H}.$$

Смысл теоремы совершенно прозрачен и без формального доказательства (достаточно громоздкого). Если значения X_n приближаются к X, то по непрерывности и $f(X_n)$ будут приближаться к $f(X)$, что вынуждает сходимость средних. Если X принимает значения лишь в ограниченной области Ω, то достаточно непрерывности f лишь в Ω, поэтому сходимость средних сохраняется на расширенном классе $\mathscr{H}_\Omega = \bigcap\limits_{m \in \Omega} \mathscr{H}_m$. В исключительном случае, когда $\Omega = m$ — число, имеем следующее утверждение.

Теорема 3.5. *Сходимость в среднеквадратическом к постоянному числу $X_n \xrightarrow{2} m$ эквивалентна ИМ-сходимости X_n к $X = m$ в направлении класса $\mathscr{H}_m$.*

Таким образом, скв-сходимость к постоянному числу является более слабой формой по сравнению с ИМ-сходимостью (на всей $\mathscr{F}^X$), так как гарантирует сходимость средних лишь на подклассе $\mathscr{H}_m \subset \mathscr{F}^X$. Интересно отметить, что скв-сходимость к постоянному числу эквивалентна сходимости средних всего на трех (входящих в $\mathscr{H}_m$) признаках и равносильна ИМ-сходимости на $\mathscr{H}_m$:

$$X_n \xrightarrow{2} m \Leftrightarrow \{\overline{M} X_n^2 \to m^2, \ \underline{M} X_n \to m,$$
$$\overline{M} X_n \to m\} \Leftrightarrow \{\overline{M} f(X_n) \to \overline{M} f(m), \ \forall f \in \mathscr{H}_m\}.$$

Сходимость среднего арифметического, закон больших чисел. В теории вероятностей и развиваемой нами интервальной теории моделей случайных явлений этот закон носит ключевой характер.

По своему внутреннему содержанию среднее согласно объяснению § 1.1 есть физическая величина, достижимая как предел среднеарифметического результатов наблюдений за признаком f в серии независимых одинаковых повторений. Для устойчивых явлений пределом будет число Mf, причем сколько бы раз мы ни возвращались к новой серии испытаний — одно и то же. А для неустойчивых — это будут в каждой серии разные числа, но располагающиеся на некотором одном и том же отрезке $[\underline{M}f, \overline{M}f]$, тем более широком, чем глубже «поражены» нестабильностью внутренние законы генерации явления.

Теперь задача состоит в проверке, подтверждает ли сама построенная нами теория тот изначальный смысл, который вкладывался в ее конструкцию? Это и будет основным критерием состоятельности теории (если относить к следующим критериям доступность теории, интерпретируемость параметров и простоту применений). Все данные для указанной проверки уже имеются: определена независимость и, как форма ее проявления, — ковариированность, введены понятия сходимости. Приступим к исследованию среднего арифметического.

Пусть X_i, $i = 1, 2, \ldots$, — последовательность с. в. Ее элементы можно понимать как результаты наблюдений за самой с. в. или же за некоторым признаком $X = f(\xi)$ случайного явления ξ. Будем сначала считать, что средние $MX_i = m_i$ точно известны и $M(x_i - m_i)(X_j - m_j) = 0$ при $i \neq j$ — это есть следствие независимости (см. замечание к (2.10)), названное нами нековариированностью с. в. Она эквивалентна (при точных средних) некоррелированности центрированных с. в. $\mathring{X}_i = X_i - MX_i$, отражаемой равенствами: $\underline{M} \mathring{X}_i \mathring{X}_j = \overline{M} \mathring{X}_i \mathring{X}_j = 0$, $i \neq j$. Для таких $\mathring{X}_i$ верны неравенства:

$$\overline{M} (\Sigma \mathring{X}_i)^2 \leqslant \Sigma \overline{M} \mathring{X}_i^2, \ \underline{M} (\Sigma \mathring{X}_i)^2 \geqslant \Sigma \underline{M} \mathring{X}_i^2. \tag{3.8}$$

Доказываются они элементарно следующим образом:

$$\overline{M} (\Sigma \mathring{X}_i)^2 = \overline{M} \sum_i \sum_j \mathring{X}_i \mathring{X}_j \leqslant \sum_i \sum_j \overline{M} \mathring{X}_i \mathring{X}_j = \Sigma \overline{M} (\mathring{X}_i)^2.$$

Теорема 3.6. Устойчивый вариант закона больших чисел. *Пусть X_i, $i = 1, 2, \ldots$, — последовательность нековариированных с. в. с точными средними $m_i = MX_i$, такими, что существует и конечен предел $m = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_1^n m_i$, и ограниченными дисперсиями $\overline{M}(X_i - m_i)^2 = \overline{\sigma}^2_i \leqslant \overline{\sigma}^2$. Тогда при $n \to \infty$ среднее арифметическое $S_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^n X_i$ этих с. в.*: (I) *будет скв-сходиться $S_n \xrightarrow{2} m$ к постоянному числу m*; (II) *ИМ-сходиться к числу m в направлении класса $\mathscr{H}_m$ непрерывных в точке m признаков, имеющих скорость роста не быстрее x^2 (условие (3.7)).*

Доказательство. Обозначим $\overset{\circ}{X}_i = X_i - m_i$ — центрированные с. в. Для них $\overline{M}(\overset{\circ}{X}_i)^2 \leqslant \overline{\sigma}^2$, $M\overset{\circ}{X}_i\overset{\circ}{X}_j = 0$, $i \neq j$, откуда

$$\overline{M}\left(S_n - \frac{1}{n}\sum_1^n m_i\right)^2 = \overline{M}\left(\frac{1}{n}\sum_1^n \overset{\circ}{X}_i\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^2}\sum_i\sum_j \overline{M}\,\overset{\circ}{X}_i\,\overset{\circ}{X}_j = \frac{1}{n^2}\sum \overline{M}\,(\overset{\circ}{X}_i)^2 \leqslant \frac{\overline{\sigma}^2}{n}$$

и $S_n \xrightarrow{2} m$. Из последнего согласно теореме 3.5 следует сходимость в направлении $\mathcal{H}_m$, что доказывает вторую часть.

Замечания. 1. В условиях теоремы 3.6 ограниченность дисперсий может быть заменена ограниченностью $\overline{M}X^2_i \leqslant b$, $i = 1, 2, \ldots$ (так как $\overline{M}(X_i - m_i)^2 \leqslant \overline{M}X^2_i$).

2. Если $MS_n = \sum\limits_1^n m_i/n$ при $n \to \infty$ не сходится ни к какому числу, то на основании неравенства

$$\overline{M}f(S_n) = \overline{M}f(S_n - MS_n + MS_n) \leqslant \sup_{MS_n}\overline{M}f(\overset{\circ}{S}_n + MS_n)$$

с учетом вытекающей из теоремы 3.6 сходимости $\overset{\circ}{S}_n \to 0$ доказывается неравенство

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\overline{M}f(S_n) \leqslant \sup_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}} f(m), \tag{3.9}$$

где $\underline{m} = \underline{\lim}\,MS_n$, $\overline{m} = \overline{\lim}\,MS_n$, справедливое для всех f, непрерывных на концах отрезка $[\underline{m}, \overline{m}]$.

Самый наглядный и самый распространенный вариант закона больших чисел получается, когда все $m_i = m$, $i = 1, 2, \ldots$, т. е. одинаковы. Тогда, очевидно, $MS_n = m$ и среднее арифметическое S_n будет указанным в теореме 3.6 образом сходиться к этому m. Поэтому даже если m было первоначально неизвестно, в пределе, взяв среднее арифметическое наблюдений X_i, получим его точное значение. Это и есть классический закон больших чисел, а правильнее, многих чисел, неоднократно подтвержденный экспериментально, в частности, сериями подбрасывания монеты.

Пусть теперь среднее $m = MX_i$ есть стационарный неизвестный параметр, описываемый частной ИМ $\mathcal{M}^m$, т. е. m по i одно и то же, но не известно какое, а совместная ИМ равна $\mathcal{M}^{\mathbf{X}\,m} = \mathcal{M}^m \times \mathcal{M}^{\mathbf{X}}{}_m$. Относительно переходной $\mathcal{M}^{\mathbf{X}}{}_m$ при каждом m с. в. X_i считаются нековариированными и $M_m X_i = m$, $i = 1, 2, \ldots$ Тогда S_n будет скв-сходиться к с. в. m, определенной ИМ $\mathcal{M}^m$. Согласно теореме 3.4 отсюда будет следовать сходимость $\overline{M}f(S_n) \to \overline{M}^m f(m)$, $\forall f \in \mathcal{H}$.

В частности, пусть $\mathcal{M}^m$ — индикаторная на отрезке $[\underline{m}, \overline{m}]$ ИМ, т. е. известно лишь, что $\underline{m} \leqslant m \leqslant \overline{m}$ и $\mathcal{M}^{\mathbf{X}} = \bigvee\limits_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}} \mathcal{M}^{\mathbf{X}}{}_m$. Тогда S_n будет скв-сходиться к с. в. m с индикаторной на $[\underline{m}, \overline{m}]$ ИМ, откуда будет следовать ИМ-сходимость $\overline{M}f(S_n) \to \sup\limits_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}} f(m)$ в направлении класса $\mathcal{H}_{\underline{m},\,\overline{m}}$ признаков, определенного следующими двумя условиями: 1) для каждого признака из этого класса выполняется (3.7), 2) каждый признак непрерывен на границах отрезка $[\underline{m}, \overline{m}]$ и в точке достижения им максимума. Здесь ИМ-сходимость является следствием сходимости значений.

Закон больших чисел для неустойчивых последовательностей. Откажемся в предыдущих рассуждениях от предположения, что MX_i являются либо точными, либо это неизвестный стационарный параметр. Будем считать, что при каждом i с. в. X_i независимы и их среднее может быть любым внутри интервала $[\underline{M}X_i, \overline{M}X_i]$, и в этом смысле X_i статистически неустойчивы. Тогда S_n не будет скв-сходиться ни к какой с. в. Можно говорить лишь об ИМ-сходимости, т. е. сходимости $\mathcal{M}^{S_n}$.

Теорема 3.7. *Пусть X_i, $i = 1, 2, \ldots$, независимы и заданы $\underline{M}X_i$, $\overline{M}X_i$ и $\overline{M}X^2_i \leqslant b$. Тогда при $n \to \infty$ среднее арифметическое этих с. в. S_n ИМ-сходится в направлении $\mathcal{H}_{\underline{m},\,\overline{m}}$ признаков к индикаторной на $[\underline{m}, \overline{m}]$ ИМ, где*

$$\underline{m} = \underline{\lim}\,\frac{1}{n}\sum_1^n \underline{M}X_i, \quad \overline{m} = \overline{\lim}\,\frac{1}{n}\sum_1^n \overline{M}X_i.$$

Доказательство. Нужно показать, что $\overline{M}f(S_n) \to \max\limits_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}} f(m)$. Представляя $\mathcal{M}^{X_i} = \bigvee\limits_{\underline{M}X_i \leqslant MX_i \leqslant \overline{M}X_i} \mathcal{M}^{X_i}_{MX_i}$, записываем

$$\mathcal{M}^{\mathbf{X}} = \bigvee_{\underline{M}X_1 \leqslant MX_1 \leqslant \overline{M}X_1}\ \bigvee_{\underline{M}X_2 \leqslant MX_2 \leqslant \overline{M}X_2} \cdots \left(\mathcal{M}^{X_1}_{MX_1} \times \mathcal{M}^{X_2}_{MX_2} \times \ldots\right) = \bigvee_{M\mathbf{X}} \mathcal{M}^{\mathbf{X}}_{M\mathbf{X}},$$

где $M\mathbf{X} = (MX_1, \ldots, MX_n)$ — вектор средних. Пусть признак $f \in \mathcal{H}_{\underline{m},\,\overline{m}}$ и пусть x_{max} есть точка его максимума внутри $[\underline{m}, \overline{m}]$. Тогда $\overline{M}f(S_n) = \sup\limits_{M\mathbf{X}} \overline{M}_{M\mathbf{X}} f(S_n)$. Взяв в качестве $M\mathbf{X}$ такую последовательность, что $\frac{1}{n}\sum\limits_1^n MX_i \to x_{max}$, получим согласно теореме 3.6 $\overline{M}_{M\mathbf{X}} f(S_n) \to f(x_{max})$, откуда

$$\lim \overline{M}f(S_n) \geqslant f(x_{max}) = \max_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}} f(m).$$

Осталось доказать противоположное неравенство. Для любого $\varepsilon > 0$: $\overline{M}f(S_n) \leqslant \overline{M}f(S_n)\{\underline{m} - \varepsilon \leqslant S_n \leqslant \overline{m} + \varepsilon\} + \overline{M}f(S_n)\{S_n < \underline{m} - \varepsilon\} + \overline{M}f(S_n)\{S_n > \overline{m} + \varepsilon\}$.

Покажем, что при $n\to\infty$ последние два слагаемые стремятся к 0. Имеем

$$\overline{M}f(S_n)\{S_n<\underline{m}-\varepsilon\}=\sup_{M\mathbf{X}}\overline{M}_{M\mathbf{X}}f(S_n)\{S_n<\underline{m}-\varepsilon\}.$$

Так как для каждого $M\mathbf{X}$ среднее арифметическое его компонент удовлетворяет неравенству $\underline{m}\leqslant\underline{\lim}\,MS_n\leqslant MS_n\leqslant\overline{\lim}\,MS_n\leqslant\overline{m}$, то, применяя неравенство (3.9), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\overline{M}_{M\mathbf{X}}f(S_n)\{S_n<\underline{m}-\varepsilon\}\leqslant\sup_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}}f(m)\{m<\underline{m}-\varepsilon\}=0,$$

откуда $\overline{M}f(S_n)\{S_n<\underline{m}-\varepsilon\}\to0$. Аналогично $\overline{M}f(S_n)\{S_n>\overline{m}+\varepsilon\}\to0$. В результате

$$\lim_{n\to\infty}\overline{M}f(S_n)\leqslant\lim_{n\to0}\overline{M}f(S_n)\{\underline{m}-\varepsilon\leqslant S_n\leqslant\overline{m}+\varepsilon\}\leqslant\max_{\underline{m}-\varepsilon\leqslant m\leqslant\overline{m}+\varepsilon}f(m).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ и непрерывности $f(x)$ в точках $\underline{m}$ и $\overline{m}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{M}f(S_n)\leqslant\max\limits_{\underline{m}\leqslant m\leqslant\overline{m}}f(m)$, что и требовалось доказать.

Замечание. Независимость в формулировке теоремы 3.7 может быть заменена на нековариированность X_i для каждого сечения $\mathscr{M}_{M\mathbf{X}}$ совместной модели вектором средних $M\mathbf{X}$.

Смысл теоремы 3.7 наиболее легко раскрывается, когда все $\underline{M}X_i=\underline{m}$, $\overline{M}X_i=\overline{m}$, $i=1,\ 2,\ \ldots$, одинаковы, в частности, когда выборка однородна, т. е. средние элементов могут «прыгать» неконтролируемым образом внутри одного и того же отрезка $[\underline{m},\ \overline{m}]$. Точно так же будет «прыгать» и среднее MS_n. Причем сами по себе значения S_n могут отклоняться за отрезок $[\underline{m},\ \overline{m}]$, но в пределе при $n\to\infty$ эти отклонения становятся все менее и менее возможными.

С платформы эксперимента серия неограниченных повторений опыта ведет в пределе к некоторому числу $m=\lim S_n$. Так вот, если в устойчивом случае согласно теореме 3.6 это должно быть в любой серии одно и то же число, то в неустойчивом мы каждый раз будем получать новые числа, и теорема 3.7 утверждает, что они должны лежать в отрезке $[\underline{m},\ \overline{m}]$. Это и будет наиболее точный их диапазон при крайне неточных данных, когда о выборке известно лишь, что ее среднестатистическая мощность ограничена: $\overline{M}X^2_i\leqslant b$, и даны диапазоны средних $\underline{M}X_i$, $\overline{M}X_i$.

Дополнения. 1. Сходимость среднего арифметического в сечениях. *Пусть X_i независимы и имеют ограниченную среднюю мощность: $\overline{M}X^2_i\leqslant b$, $i=1,\ 2,\ \ldots$ Тогда при $n\to\infty$ их среднее арифметическое $S_n=\sum X_i/n$ для каждого заданного $m=MS_n$ (т. е. в каждом своем $m=MS_n$-сечении) скв-сходится к m.*

Утверждение следует непосредственно из закона больших чисел 3.6, примененного к m-сечениям. Утверждается, что если бы средние m_i элементов стали точно известны, то к их предельному среднему арифметическому $m=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_1 m_i$ скв-сходилось бы S_n.

2. Разновидности сходимостей. Последовательность X_n, при $n\to\infty$, называется сходящейся (по своим значениям) к с. в. X:

а) *в среднем* ($X_n\xrightarrow{r}X$), если $\overline{M}|X-X_n|^r\to0$, где $r>0$;

б) *по вероятности* ($X_n\xrightarrow{\text{в}}X$), если $\overline{P}(|X-X_n|>\varepsilon)\to0$, $\forall\varepsilon>0$;

в) *почти всюду* ($X_n\xrightarrow{\text{пв}}X$), если $\overline{P}(\bigcap\limits_1^n\{|X-X_n|>\varepsilon\})\to0$, $\forall\varepsilon>0$.

Верны утверждения, близкие по своей сути и по способу доказательства к классическим [1]:

1) $X_n\xrightarrow{r}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{\text{в}}X\Leftarrow X_n\xrightarrow{\text{пв}}X$.

2) $X_n\xrightarrow{r}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{r'}X,\quad\forall r'\leqslant r$.

3) X_n равномерно ограничены ($\exists h:\overline{P}(X_n>h)=0,\ \forall n$) и $X_n\xrightarrow{\text{в}}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{r}X$.

4) Если X_n сходится (r, в., пв) к X и X_n равномерно ограничены, то $\overline{M}X_n\to\overline{M}X$, $\underline{M}X_n\to\underline{M}X$.

5) При условии конечности моментов $\overline{M}|X_n|^r<h$, $\overline{M}|X|^r<h$ верно:

$$X_n\xrightarrow{\text{в}}X\Rightarrow X_n\xrightarrow{r'}X,\quad\forall r'\leqslant r\Rightarrow X_n\xrightarrow{1}X\Rightarrow\overline{M}X_n\longrightarrow\overline{M}X,\quad\underline{M}X_n\longrightarrow\underline{M}X.$$

6) Если $f(x)$ абсолютно непрерывна, то сходимость $X_n\to X$ в., r или пв. влечет точно такую же сходимость $f(X_n)\to f(X)$, причем если $f(x)$ ограничена, то $\underline{M}f(X_n)\to\underline{M}f(X)$, $\overline{M}f(X_n)\to\overline{M}f(X)$.

7) Пусть моменты $\overline{M}|X|^r$ и $\overline{M}|X_n|^r$, $\forall n$, конечны. Тогда из сходимости в среднем будет следовать сходимость моментов:

$$X_n\xrightarrow{r}X\Rightarrow\overline{M}\,|X_n|^r\longrightarrow\overline{M}\,|X|^r,\quad\underline{M}\,|X_n|^r\longrightarrow\underline{M}\,|X|^r.$$

3.3. ДОПРЕДЕЛЬНАЯ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ПРОБЛЕМЫ

Аппроксимация модели суммы независимых с. в. Рассмотрим сумму $\sum X_i$ (для краткости пределы суммирования, где они не обязательны, будем опускать). Слагаемые считаются независимыми и по праву независимого произведения совместная ИМ вектора $\mathbf{X}=(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ полностью определяется частными: $\mathscr{M}^{\mathbf{X}}=\mathscr{M}^{X_1}\times\ldots\times\mathscr{M}^{X_n}$.

Первичными для совместной модели $\mathscr{M}^{\mathbf{X}}$ будут всевозможные произведения частных признаков $\prod g_i(x_i)$ с перенесением на них средних по закону интервальной мультипликативности (3.5). Расчет модели суммы производится по формуле продолжения

$$\overline{M}f(\sum X_i)=\inf\{\sum_j\overline{\prod_i Mg_{ij}(X_i)}:\ \sum_j\prod_i g_{ij}(x_i)\geqslant f(\sum x_i)\},$$

где нижняя грань ищется выбором $g_{ij}(x_i)$ из области существования $\mathscr{F}_i^{X_i}$ частных моделей.

Вычисления по этой формуле весьма громоздки. Исключение составляют те признаки f, которые при подстановке в них на место аргумента суммы $\sum x_i$ сами разлагаются на суммы произведений $\sum\prod g_{ij}(x_i)$, тогда среднее на произведениях находится по свойству мультипликативности, а для средних сумм приближенные значения получаются по свойству полуаддитивности. Рассмотрим примеры конкретных f, их разложений и средних от сумм.

Линейный признак:

$$f(x)=x;\ f\left(\sum x_i\right)=\sum x_i;\ \overline{M}\sum X_i=\sum \overline{M}X_i.$$

Здесь считается $x\in\mathcal{F}_i^{X_i}$, $\forall i$, а равенство в правой части (вместо полуаддитивности) имеет место на основании свойства аддитивности средних сумм независимых с. в.

Квадратичный признак:

$$f(x)=x^2;\ f\left(\sum x_i\right)=\sum x_i^2+\sum_{i\neq j}\sum x_i x_j;$$

$$\overline{M}\left(\sum X_i\right)^2\leqslant\sum \overline{M}X_i^2+\sum_{i\neq j}\sum \overline{\overline{M}X_i\,\overline{M}X_j},$$

где неравенство обязано свойству полуаддитивности и считается $x,\ x^2\in\mathcal{F}_i^{X_i}$, $\forall i$, (ниже это молча предполагается). Правая часть полученного неравенства и является оценкой верхнего среднего квадрата суммы.

Несколько более точную оценку можно получить, если взять $M\mathbf{X}=(MX_1,\ \ldots,\ MX_n)$-сечение модели; тогда для верхнего среднего в силу того, что в сечениях случайные величины X_i остаются независимыми, верно равенство

$$\overline{M}_{M\mathbf{X}}\left(\sum X_i\right)^2=\sum \overline{M}_{M\mathbf{X}}X_i^2+\sum_{i\neq j}\sum MX_i\,MX_j.$$

Теперь если взять максимум правой части по $MX_i\in[\underline{M}X_i,\ \overline{M}X_i]$, $i=1,\ \ldots,\ n$, то с учетом того, что $\overline{M}_{M\mathbf{X}}X^2_i\leqslant\overline{M}X^2_i$ и максимум достигается при MX_i, равном $\underline{M}X_i$ или $\overline{M}X_i$, получим окончательную оценку в виде правой части неравенства

$$\overline{M}\left(\sum X_i\right)^2\leqslant\sum \overline{M}X_i^2+\max_{M^{(i)}=\underline{M}\text{ или }\overline{M}}\sum M^{(i)}X_i\,M^{(j)}X_j.$$

Подобное выражение верно и для нижнего среднего, только в этом случае неравенство меняет знак, верхнее среднее заменяется на нижнее, а максимум на минимум. Такой же путь возможен для оценки нижних и верхних средних $\underline{M}(\sum X_i)^r$, $\overline{M}(\sum X_i)^r$ степенных признаков порядка $r>2$, называемых начальными моментами, а также для оценки средних их линейных комбинаций — полиномов: $\overline{M}(a_1\sum X_i+\ldots+a_k(\sum X_i)^k)$, так как они тоже разлагаются на суммы произведений X_i.

Оценки в виде правых частей неравенств для средних значений степенных функций (отсюда и полиномов) образуют набор, аппроксимирующий сверху модель суммы, т. е. позволяющий сформировать расширенную модель суммы, пользуясь лишь знаниями моментов слагаемых. Одно из достоинств именно такого расширения заключается в непосредственной физической интерпретируемости характеристик, на которых оно основывается: первый момент есть среднее с. в., второй — средняя статистическая мощность и т. д. А другое важное достоинство обязано тому, что согласно первой теореме Вейерштрасса [23, стр. 39] любую непрерывную (и кусочно-непрерывную) функцию на ограниченном отрезке можно сколь угодно точно в равномерной метрике аппроксимировать полиномами, что делает класс степенных признаков весьма распространенным. Степенные признаки x^k, $k=1,2,\ldots$, образуют *первый универсальный класс признаков*.

Некоторое стеснение при работе в этом классе вызывает необходимость полагать, что $x^k{}_i\in\mathcal{F}_i^{X_i}$, $\forall i$, где k — порядок старшего момента. А так как x^k — неограниченная функция и она не обязана принадлежать области существования модели, то становится вынужденной формальная фраза: «Пусть существуют моменты k-го порядка случайных величин X_i». Голословность этой фразы оправдывается, возможно, тем, что для практики преобладающее большинство с. в. являются ограниченными и моменты существуют.

В дополнение к степенным и полиномиальным признакам укажем еще на экспоненциальные признаки как возможное направление для аппроксимации моделей суммы:

$$f_э(ux)=\exp(ux),$$

$$\underline{M}\exp\left(\sum uX_i\right)=\prod \underline{M}\exp(uX_i),\qquad \overline{M}\exp\left(\sum uX_i\right)=$$

$$=\prod \overline{M}\exp(uX_i),$$

где в последних формулах использовано свойство мультипликативности верхнего и нижнего средних на произведениях частных неотрицательных признаков независимых с. в. Незначительность в применениях экспоненциальных признаков обусловлена не столько их неограниченностью, хотя и это тоже влияет, сколько неудобством разложения произвольных функций в ряды по ним, взятым в качестве базиса.

Гармоническая аппроксимация. *Второй универсальный класс признаков* для расчета средних сумм образуется набором гармонических функций $f_s(ux)=\sin ux$, $f_c(ux)=\cos ux$, где u — параметр, $-\infty<u<\infty$ — своего рода индекс гармоники. Гармоники ограничены и формируют плотный класс в том смысле, что (согласно второй теореме Вейерштрасса [23, с. 41]) их линейными комбинациями могут быть сколь угодно приближены любые ограниченные непрерывные на конечном отрезке функции (аппроксимацию дает разложение Фурье). Гармонические функции при подстановке на место аргумента сумм разлагаются на суммы произведений, что позволяет произвести подсчет их средних, которым сейчас и займемся.

Назовем $|\overline{M}|f=\max\{|\underline{M}f|,\ |\overline{M}f|\}$ — *абсолютным средним признака* f. Обозначим

$$\underline{\nu}_i(u)=\underline{M}\cos uX_i,\ \underline{\lambda}_i(u)=\underline{M}\sin uX_i,$$

$$\overline{\nu}_i(u)=\overline{M}\cos uX_i,\ \overline{\lambda}_i(u)=\overline{M}\sin uX_i$$

и назовем *гармоническими средними с. в.* X_i. Введем *абсолютные гармонические средние:* $|\overline{\nu}_i|(u) = |\overline{M}| \cos uX_i$, $\Lambda_i(u) = |\overline{M}| \sin uX_i$,

$$|\nu_i|(u) = \min_{\underline{\nu}_i \leqslant \nu_i \leqslant \overline{\nu}_i} |\nu_i(u)| = \begin{cases} \underline{\nu}_i(u) & \text{при } \underline{\nu}_i(u) > 0, \\ 0 & \text{при } \underline{\nu}_i(u) \leqslant 0 \leqslant \overline{\nu}_i(u), \\ -\overline{\nu}_i(u) & \text{при } \overline{\nu}_i(u) < 0, \end{cases}$$

очевидно, являющиеся неотрицательными и $|\underline{\nu}_i|(0) = |\overline{\nu}_i|(0) = 1$, $\Lambda_i(0) = 0$. По существу, $|\underline{\nu}_i|(u)$ есть минимальное по $\underline{M} \leqslant M \leqslant \overline{M}$ абсолютное среднее косинуса $|M \cos uX_i|$ с. в. X_i, $|\overline{\nu}_i|(u)$ — ее максимальное по модулю значение, а $\Lambda_i(u) = |\overline{\lambda}_i|(u)$ — то же для синуса $M \sin uX_i$.

Теорема 3.8. Основные неравенства для гармонических средних сумм. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$ *независимы. Тогда для всех* u *и* φ:

$$\text{(I)}\quad |\overline{M}| \cos\left(u \sum_{i=1}^{n} X_i + \varphi\right) \leqslant \overline{A}_\Sigma(u) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{|\overline{\nu}_i|^2(u) + \Lambda_i^2(u)}\,.$$

А для тех u, *для которых* $\min_i \underline{\nu}_i(u) > 0$, *а также*

$$\varphi_\Sigma(u) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{arctg}(\Lambda_i(u)/\underline{\nu}_i(u)) \leqslant \pi/2,$$

справедливы следующие три неравенства:

$$\text{(II)}\quad \overline{M} \cos u \sum_{1}^{n} X_i \leqslant \prod_{1}^{n} \overline{\nu}_i(u);$$

$$\text{(III)}\quad \underline{M} \cos u \sum_{1}^{n} X_i \geqslant \prod_{1}^{n} \sqrt{\underline{\nu}_i^2(u) + \Lambda_i^2(u)} \cos \varphi_\Sigma(u);$$

$$\text{(IV)}\quad |\overline{M}| \sin u \sum_{1}^{n} X_i \leqslant \overline{A}_\Sigma(u) \sin\left[\sum_{1}^{n} \operatorname{arctg}(\Lambda_i(u)/\overline{\nu}_i(u))\right].$$

Доказательство. Используем при каждом фиксированном $u \in \mathscr{R}$ представление

$$\langle \overline{M} \mathscr{F}^{\mathbf{X}} \rangle = \bigvee \ldots \bigvee \langle \overline{M}_{\nu_1, \lambda_1} \mathscr{F}_1^{X_1} \rangle \times \ldots \times \langle \overline{M}_{\nu_n, \lambda_n} \mathscr{F}_n^{X_n} \rangle = \bigvee_{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}} \langle \overline{M}_{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}} \mathscr{F}^{\mathbf{X}} \rangle,$$

где $\langle \overline{M}_{\nu_i, \lambda_i} \mathscr{F}_i^{X_i} \rangle$ есть $\nu_i = M \cos uX_i$, $\lambda_i = M \sin uX_i$-сечения $\langle \overline{M} \mathscr{F}_i^{X_i} \rangle$, а $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Обозначая Re — действительную часть комплексного числа, а Im — мнимую, используя равенство $\cos(u \sum x_i + \varphi) = \operatorname{Re} \prod_1^n e^{j(ux_i + \varphi)}$, где j — комплексная единица, с учетом того, что правая его часть есть сумма произведений $\cos ux_i$ и $\sin ux_i$, а потому при точных ν_i и λ_i

среднее $M_{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}}$ будет точным и проносится за знак суммы и произведений, получаем

$$\overline{M} \cos\left(u \sum_1^n X_i + \varphi\right) = \max_{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}} \operatorname{Re} \prod_1^n (\nu_i(u) + j\lambda_i(u))\, e^{j\varphi} =$$

$$= \max_{\boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\lambda}} \prod_1^n \sqrt{\nu_i^2(u) + \lambda_i^2(u)} \times \cos\left[\sum_1^n \operatorname{arctg}(\lambda_i(u)/\nu_i(u)) + \varphi\right]. \qquad (3.10)$$

Так как косинус меньше 1, то неравенства (I) теоремы отсюда становятся очевидными. Докажем остальные.

Выделим какое-нибудь одно значение индекса $i = k$ и преобразуем фрагмент правой части (3.10), зависящий от k (опустив для краткости аргумент u и положив $\varphi = 0$)

$$\sqrt{\nu_k^2 + \lambda_k^2} \cos[\varphi_k + \operatorname{arctg}(\lambda_k/\nu_k)] = \nu_k \cos\varphi_k + \lambda_k \sin\varphi_k,$$

где φ_k обозначена сумма в аргументе косинуса (3.10) без k-го слагаемого. Теперь видно, что при $|\varphi_k| \leqslant \pi/2$ максимум достигается при $\nu_i = \overline{\nu}_i$ и $\lambda_i = 0$ (это будет еще яснее, если максимизировать не по каждому λ_i, а по всему вектору $\boldsymbol{\lambda}$), а минимум — при $\nu_i = \underline{\nu}_i$ и $\lambda_i = |\overline{\lambda}_i|$, что доказывает (II) и (III).

Неравенство (IV) следует из соотношений

$$\left|\sqrt{\nu_i^2 + \lambda_i^2} \sin(\varphi_i + \operatorname{arctg}\lambda_i/\nu_i)\right| = |\lambda_i \cos\varphi_i + \nu_i \sin\varphi_i| \leqslant$$

$$\leqslant |\overline{\lambda}_i| \cos|\varphi_i| + \overline{\nu}_i \sin|\varphi_i|,$$

что и требовалось.

Теорема позволяет по гармоническим средним слагаемых получать оценки гармонических средних сумм, эти оценки даются правыми частями неравенств (I)—(IV). Перейдем к одному ее упрощенному случаю.

Допредельная проблема, однородный случай. Рассмотрим однородную последовательность. Для нее по определению гармонические средние для каждой из с. в. X_i будут одни и те же при $i = 1, \ldots, n$.:

$$\underline{M} \cos u X_i = \underline{\nu}(u), \quad \overline{M} \cos u X_i = \overline{\nu}(u), \quad |\overline{M}| \sin u X_i = \Lambda(u).$$

Любая последовательность может быть сделана таковой, если расширить ее модель, доводя интервалы гармонических средних объединением до самого широкого: $\underline{\nu}(u) = \min_i \underline{M} \cos uX_i$; $\overline{\nu}(u) = \max_i \overline{M} \cos uX_i$, и то же самое для синуса, и оставляя их в качестве первичных. Из теоремы 3.8 вытекает:

Утверждение 3.9. *Для сумм однородной последовательности независимых с. в.* $X_1, \ldots, X_n$ *при всех* u *и* φ *верно неравенство*

$$\text{(!)}\quad |\overline{M}| \cos\left(u \sum X_i + \varphi\right) \leqslant (\overline{\nu}^2(u) + \Lambda^2(u))^{n/2},$$

а при $\Lambda(u)/\underline{\nu}(u) \leqslant \mathrm{tg}(\pi/2n)$ справедливы уточненные неравенства

$$\text{(II)}\ \overline{M}\cos\left(u\sum_1^n X_i\right) \leqslant \overline{\nu}^n(u);$$

$$\text{(III)}\ \underline{M}\cos\left(u\sum_1^n X_i\right) \geqslant (\underline{\nu}^2(u)+\Lambda^2(u))^{n/2}\cos\left(n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\Lambda(u)}{\underline{\nu}(u)}\right);$$

$$\text{(IV)}\ |\overline{M}|\sin\left(u\sum_1^n X_i\right) \leqslant (\overline{\nu}^2(u)+\Lambda^2(u))^{n/2}\sin\left(n\,\mathrm{arctg}\,\frac{\Lambda(u)}{\underline{\nu}(u)}\right).$$

Суть допредельной проблемы применительно к гармоническим признакам заключается в упрощении, унификации правых частей введенных только что неравенств при достаточно большом числе n слагаемых. Наша цель — проследить, как по мере роста n и увеличения данных о слагаемых сужаются в направлении гармонических, а затем и степенных признаков модели сумм.

Для практики, это ответ на вопрос, что общего и что конкретного можно сказать о модели суммы, скажем, пяти, десяти, ста независимых с. в., если имеются какие-то данные о слагаемых и вариант прямого расчета модели суммы исключается из-за излишней трудоемкости.

Вернемся к правым частям неравенств утверждения 3.9. Во-первых, упрощения в них возможны для биномов, записываемых (для простоты аргументы у $\nu(u)$ и $\Lambda(u)$ далее опускаются):

$$(\nu^2+\Lambda^2)^{n/2} = [1-(1-\nu^2-\Lambda^2)]^{n/2},$$

где ν равняется соответственно верхнему либо нижнему значениям. При тех условиях, когда малы $1-\nu^2$ (напомним, что $|\nu|\leqslant 1$) и Λ, т. е. в результате мало $F(\nu,\Lambda)=1-\nu^2-\Lambda^2$ (причем $F\geqslant 0$), бином правой части аппроксимируется экспонентой

$$[1-F(\nu,\Lambda)]^{n/2} = \exp\left\{-\frac{F(\nu,\Lambda)}{2} - \delta_n\left(\frac{F(\nu,\Lambda)\,n}{2}\right)\right\} \text{ при } |F(\nu,\Lambda)| \leqslant 1,$$

где $\delta_n(y) = -y - \frac{n}{2}\ln\left(1-\frac{2y}{n}\right) = 1 + \frac{y}{2}\left(\frac{2y}{n}\right) + \frac{y}{3}\left(\frac{2y}{n}\right)^2 + \ldots$ (получается, если подставить $y=Fn/2$, взять логарифм и разложить в ряд Маклорена). Поправка $\delta_n(y)$ возрастает при увеличении $y>0$ (равна ∞ при $y=n/2$) и убывает при росте n.

И во-вторых, при малых $1-\nu^2$ и Λ^2 упрощаются аргументы при косинусе и синусе в (III)—(IV). А именно, так как $\mathrm{arctg}\,x \leqslant x$ при $x>0$ и косинус на первой четверти периода убывает при увеличении аргумента, а синус — возрастает, то имеем:

Утверждение 3.10. *Для сумм однородной последовательности независимых с. в. $X_1, \ldots, X_n$ при всех u и φ верно неравенство:*

$$\text{(I°)}\ |\overline{M}|\cos\left(u\sum_1^n X_i+\varphi\right) \leqslant \exp\left\{-\frac{F(\overline{\nu},\lambda)\,n}{2} - \delta_n\left(\frac{F(\overline{\nu},\Lambda)\,n}{2}\right)\right\},$$

а при u, таких, что $n\Lambda(u)/\underline{\nu}(u) \leqslant \pi/2$, справедливы уточненные неравенства:

$$\text{(II°)}\ \overline{M}\cos\left(u\sum_1^n X_i\right) \leqslant \exp\left\{-\frac{(1-\overline{\nu}^2)\,n}{2} - \delta_n\left(\frac{(1-\overline{\nu})^2\,n}{2}\right)\right\};$$

$$\text{(III°)}\ \underline{M}\cos\left(u\sum_1^n X_i\right) \geqslant \exp\left\{-\frac{F(\underline{\nu},\Lambda)\,n}{2} - \delta_n\left(\frac{F(\underline{\nu},\Lambda)\,n}{2}\right)\right\}\cos\left(n\cdot\frac{\Lambda}{\underline{\nu}}\right);$$

$$\text{(IV°)}\ |\overline{M}|\sin\left(u\sum_1^n X_i\right) \leqslant \exp\left\{-\frac{F(\overline{\nu},\Lambda)\,n}{2} - \delta_n\left(\frac{F(\overline{\nu},\Lambda)\,n}{2}\right)\right\}\sin\left(n\cdot\frac{\Lambda}{\overline{\nu}}\right).$$

Здесь $F(\nu,\Lambda)=1-\nu^2-\Lambda^2$. Неравенства имеют содержательный смысл, когда F настолько мало, что $Fn/2$ — небольшая величина.

Чтобы проследить зависимость средних значений, даваемых правыми частями неравенств (I°)—(IV°), от n удобно *нормировать* сумму $\sum X_i/\sqrt{n}$. В новой сумме при росте n диапазон случайного разброса каждого слагаемого $X_{in}=X_i/\sqrt{n}$ стягивается к 0, отсюда к нулю устремляется $\Lambda_{(n)}(u)=|\overline{M}|\sin uX_{in}$, так как аргумент синуса и сам синус становятся ничтожно малыми, а к единице устремляется $\underline{\nu}_{(n)}(u)=\underline{M}\cos uX_{in}$ (тем более,, $\overline{\nu}_{(n)}(u)$), так как косинус в пределах малых изменений аргумента будет близок к 1. Отсюда $F_{(n)}=1-\nu^2_{(n)}-\Lambda^2_{(n)}$ уменьшается, причем при определенных условиях пропорционально n, и тогда произведение $F_{(n)}n$ будет стабилизировано по n. Соответственно стабилизируются и правые части неравенств утверждения 3.10, дающие допредельные оценки гармонических средних для сумм (см. дополнение 1).

Допредельная проблема была бы не полной, если не рассматривать степенные признаки и связанные с ними оценки и упрощения. Это можно сделать лишь для определенного типа слагаемых сумм. А именно, для симметричных X_i с ограниченными моментами (определение см. в начале § 3.1), а более широко, считая нулевыми все нечетные моменты вплоть до порядка $2k: MX_i^{2r-1}=0$, $r=1, \ldots, k$. Тогда моменты нечетных порядков суммы вплоть до $2k-1$ будут нулевыми: $M(\sum X_i/\sqrt{n})^{2r-1}=0$, так как при разложении $(\sum X_i/\sqrt{n})^{2r-1}$ на слагаемые в каждом из них будет обязательно присутствовать хотя бы одна с. в. X_i в нечетной степени, среднее которой — ноль.

Для четных моментов сумм симметричных с. в. прямое разложение на слагаемые с последующим взятием среднего и использованием свойств полуаддитивности и независимости ведет к неравенству

$$\overline{M}\left(\sum_{1}^{n} X_i/\sqrt{n}\right)^{2k} \leqslant \frac{1}{n^k}\left[n\overline{\mu}_{2k} + n(n-1)^{+}\sum_{j}\overline{\mu}_{2(k-j)}\overline{\mu}_{2j}\,C_{2k}^{2j}/2! + n(n-1)(n-2)^{+}\sum_{j+l<k}\overline{\mu}_{2(k-j-l)}\overline{\mu}_{2j}\overline{\mu}_{2l}\frac{(2k)!}{(2(k-j-l))!\,(2j)!\,(2l)!\,3!} + \ldots + n(n-1)\ldots(n-k+1)^{+}\overline{\mu}_2^{\,k}\frac{(2k)!}{2^k k!}\right], \qquad (3.11)$$

где $\overline{\mu}_{2j}=\overline{M}X_i^{2j}$. Противоположное неравенство с заменой верхних моментов на нижние $\underline{\mu}_{2j}$ верно для нижних средних $\underline{M}(\sum X_i/\sqrt{n})^{2k}$.

В частности, при $k=1$ в силу независимости X^2_i, а как следствие, аддитивности средних от суммы, имеет место равенство:

$$\overline{M}\left(\sum_{1}^{n} X_i/\sqrt{n}\right)^{2} = \overline{\sigma}^2, \quad \underline{M}\left(\sum_{1}^{n} X_i/\sqrt{n}\right)^{2} = \underline{\sigma}^2, \qquad (3.12)$$

где $\overline{\sigma}^2=\overline{\mu}_2=\overline{M}X_i^2$, $\underline{\sigma}^2=\underline{\mu}_2=\underline{M}X_i^2$.

Вместе с (3.12) правые части (3.11) и есть допредельные оценки моментов сумм симметричных с. в. Самым замечательным в (3.11) является то, что значимым при увеличении n становится лишь последнее слагаемое. Этот факт занимает ключевое положение в предельной проблеме, к предварительному освещению которой для однородных последовательностей и переходим, оставив на § 3.4 развитие допредельной и предельной проблем на суммы общего вида.

Введение в предельную проблему. Суть ее составляют те предельные при $n\to\infty$ упрощения, которые получаются с точными значениями или с приближенными в виде правых частей неравенств для средних значений ключевых признаков нормированных сумм. Предельные теоремы, во-первых, дают ответ на вопрос, для каких конкретно признаков и при каких условиях средние допускают нетривиальные приближения. И во-вторых, указывают на предельные при $n\to\infty$ значения приближений, формирующие расширенную предельную модель сумм.

Наша конечная цель — проследить, как по мере накопления и уточнения данных о слагаемых (сужения их моделей) сужается предельная модель нормированной суммы и, в конечном счете, сходится к нормальной. Сходимость к нормальному закону прослеживается в двух универсальных направлениях: на классе степенных признаков и на классе гармонических согласно теореме 3.1 характеризации нормальной с. в.

Для степенных признаков сходимость означает сходимость моментов к нормальным значениям $MY^{2k-1}=0$, $MY^{2k}=\sigma^{2k}(2k)!/(k!2^k)$ (см. 3.4)), что в случае симметричных с. в. X_i вытекает непосредственно из (3.11) и (3.12) и приводит к следующему:

Утверждение 3.11. *Пусть последовательность X_i независима, однородна, ограничена (существуют все моменты), симметрична (средние MX_i и моменты нечетных порядков все равны 0) и пусть $\underline{M}X^2_i=\underline{\sigma}^2$, $\overline{M}X^2_i=\overline{\sigma}^2$. Тогда при $k=1, 2, \ldots$, справедливы такие соотношения для моментов нормированных сумм:*

$$1^\circ.\ M\left(\sum_{1}^{n} X_i/\sqrt{n}\right)^{2k-1} \equiv 0;$$

$$2^\circ.\ \lim_{n\to\infty}\overline{M}\left(\sum_{1}^{n} X_i/\sqrt{n}\right)^{2k} \leqslant \overline{\sigma}^{2k}(2k)!/(k!\,2^k);$$

$$3^\circ.\ \lim_{n\to\infty}\underline{M}\left(\sum_{1}^{n} X_i/\sqrt{n}\right)^{2k} \geqslant \underline{\sigma}^{2k}(2k)!/(k!\,2^k).$$

В самом деле, в выражении (3.11) все слагаемые, кроме последнего, исчезают при увеличении n, а последнее и дает правую часть неравенства 2°. Для нижнего среднего неравенство (3.11) заменяется на противоположное, откуда следует 3°.

Правые части неравенств утверждения 3.11 в качестве первичных определяют предельную ИМ, сужающуюся по мере уточнения интервала $\underline{\sigma}^2$, $\overline{\sigma}^2$ дисперсий к нормальной модели.

Следствие. *Если в условиях утверждения 3.11 дисперсия является точной $\underline{\sigma}^2=\overline{\sigma}^2=\sigma^2$, то имеет место ИМ-сходимость суммы к нормальной с. в.*

Замечание. Чем старше порядок k, тем, в общем-то, медленнее имеет место сходимость моментов к их нормальным значениям. Сказанное верно хотя бы потому, что при этом в правой части (3.11) будет большее число слагаемых помимо последнего, неисчезающего.

В направлении гармонических признаков согласно теоремам 3.1, 3.8 и формуле (3.3) нормальной считается сходимость к нулю синусоидальных средних сумм $M\sin(u\sum X_i/\sqrt{n})$ (для симметричных слагаемых они точно равны нулю) и к $\exp(-\sigma^2u^2/2)$ — косинусоидальных $M\cos(u\sum X_i/\sqrt{n})$ при контроле условия, что $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{P}(\sum X_i/\sqrt{n}>H)\underset{H\to\infty}{\to}0$. Последнее условие всегда выполняется для независимой последовательности с нулевыми средними $MX_i=0$ и ограниченной дисперсии $\overline{M}X^2_i\leqslant\overline{\sigma}^2$ слагаемых, так как из аналога неравенства Чебышева (§ 3.2) с учетом равенства (3.12) получается:

$$\overline{P}\left(\sum X_i/\sqrt{n}>H\right)\leqslant\overline{\sigma}^2/H^2\underset{H\to\infty}{\to}0.$$

При условиях следствия совершенно резонно полагать, что гармонические средние также должны сходиться к нормальным их значениям. В самом деле, равенство нулю синусоидальных средних следует из симметрии слагаемых. А сходимость к нормальным значениям косинусоидальных средних будет следствием предельных теорем для сумм общего вида, о которых будет говориться о последующих разделах.

Таким образом, имеются два направления доказательства предельных законов нормальной сходимости: степенное и гармоническое. В предверии нормального закона, когда либо n конечно (допредельный случай), либо условия на слагаемые недостаточны для нормальной сходимости, оба направления не подменяют, а дополняют друг друга; каждое из них дает свои грани допредельной модели, каждое по-своему характеризует приближение к нормальной с. в.

Нами сформулирован простейший вариант предельного закона, демонстрирующий основную идею, генеральную мысль. При этом требования к слагаемым предъявлялись очень жесткие: все имеют нулевые средние и нулевые нечетные моменты, а также точные одинаковые дисперсии, что само собой подразумевает стационарность этих параметров и необходимую для этого статистическую устойчивость выборки, а в конечном счете — абсолютное знание.

Допустим хоть на миг, что последовательность «чуть-чуть» статистически неустойчива. Это вынуждает рассматривать вместо точных средних интервальные $\underline{M}X_i$, $\overline{M}X_i$. Причем как бы ни были они близки к нулю, скажем, $[\underline{M}X_i,\ \overline{M}X_i] = [-\varepsilon,\ +\varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, т. е. сколь бы малым мы не взяли ε, все равно границы интервала средних нормированной суммы, равные

$$\underline{M}\,(\Sigma\ X_i/\sqrt{n}) = -\sqrt{n}\,\varepsilon,\quad \overline{M}\,(\Sigma\ X_i/\sqrt{n}) = +\sqrt{n}\,\varepsilon,$$

при $n \to \infty$ будут неограниченно «разбегаться» в разные стороны, делая бессмысленной нормальную сходимость. Это есть демонстрация крайней критичности классических предельных результатов к вариациям условий.

Мы избежим упомянутой критичности, если не будем исключать сходимости законов сумм к другим, более широким, чем нормальная, моделям. Это и будет предельная проблема в ее расширенном понимании. В следующем параграфе мы и начнем постепенное продвижение по ней шаг за шагом от самых слабых допущений на слагаемые, имея в виду неустойчивость и неоднородность последовательности, к более сильным, приходя в конечном счете к классическим условиям, при которых имеет место нормальная сходимость.

Дополнение. Допредельная теорема для однородной последовательности. *Пусть* $X_1, \ldots, X_n$, $n \geqslant 3$, *независимы, имеют нулевые средние* $MX_i = 0$ *и конечную дисперсию* $\overline{M}X^2_i = \overline{\sigma}^2$. *Тогда их нормированная сумма* $s_n = \sum X_i/\sqrt{n}$ *включается в с. в.* Y *(в смысле* $\mathscr{M}^{s_n} \subset \mathscr{M}^{Y}$*), задаваемую первичными средними* $MY = 0$, $\overline{M}Y^2 = \overline{\sigma}^2$ *и*

$$\underline{M}\cos uY = \exp\left\{-\frac{\overline{\sigma}^2 u^2}{2} - \delta_n\left(\frac{\overline{\sigma}^2 u^2}{2}\right)\right\}\cos\frac{c_*\overline{\sigma}^2 u^2}{1 - \overline{\sigma}^2 u^2/(2n)}$$

при u *таких, что в правой части равенства аргумент косинуса меньше* $\pi/2$, *а* $c_* = 0{,}3184$.

Доказательство. Во-первых, в силу нулевых средних слагаемых таким же будет $Ms_n = 0$, а вследствие (3.12) $\overline{M}s^2_n = \overline{\sigma}^2$. Они дают средние степенных признаков нормированной суммы в направлении линейной и квадратичной функций. Для гармонических «направлений» неравенства (3.13) и (3.14) следующего раздела ведут к таким двум неравенствам: $F(\underline{\nu},\ \Lambda) = 1 - \underline{\nu}^2 - \Lambda^2 \leqslant 1 - \underline{\nu}^2 \leqslant \overline{\sigma}^2 u^2/n$, $n\Lambda/\underline{\nu} \leqslant c_*\overline{\sigma} u^2/[1 - \overline{\sigma}^2 u^2/(2n)]$ — и их подстановка в (III°) утверждения 3.10 доказывает теорему.

3.4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СУММ ОБЩЕГО ВИДА

Центральные допредельные неравенства. Рассмотрим суммы общего вида $\sum X_{in}$, понимая X_{in}, $i = 1, \ldots, n$, как последовательности серий независимых с. в.

Видоизменим неравенства утверждения 3.10 применительно к сумме общего вида, как и ранее обозначая $F(\nu,\ \Lambda) = 1 - \nu^2 - \Lambda^2$, $\underline{\nu}_{in} = \underline{M}\cos uX_{in}$, $|\overline{\nu}_{in}| = |\overline{M}|\cos uX_{in}$, $\Lambda_{in} = |\overline{M}|\sin uX_{in}$, переменную u для краткости опуская, где можно.

Теорема 3.12. Допредельные неравенства для гармонических средних. *Пусть* X_{in}, $i = 1, \ldots, n$, *— последовательность независимых с. в.. Тогда для всех* φ *и* u *верно неравенство*

$$\text{I. } |\overline{M}|\cos\left(u\sum_{i=1}^{n} X_{in} + \varphi\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F(|\overline{\nu}_{in}|,\ \Lambda_{in})\right\},\ \forall\varphi, u;$$

а при $\min\limits_i \underline{\nu}_{in}(u) > 0$ и $\Psi_\Sigma(u) = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\Lambda_{in}}{\underline{\nu}_{in}} \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ *верны неравенства*

$$\text{II. } \overline{M}\cos\left(u\sum_{i=1}^{n} X_{in}\right) \leqslant \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}(1 - \overline{\nu}_{in})\right\};$$

$$\text{III. } \underline{M}\cos\left(u\sum_{i=1}^{n} X_{in}\right) \geqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F(\underline{\nu}_{in},$$
$$\Lambda_{in})\left[-\frac{\ln(1 - F_n)}{F_n}\right]\right\}\cos\Psi_\Sigma(u),$$

где $F_n = \max\limits_{i=1,\ldots,n} F(\underline{\nu}_{in},\ \Lambda_{in})$;

$$\text{IV. } |\overline{M}|\sin\left(u\sum_{i=1}^{n} X_{in}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} F(\overline{\nu}_{in},\ \Lambda_{in})\right\}\sin\left(\sum_{i=1}^{n}\Lambda_{in}/\overline{\nu}_{in}\right).$$

Доказательство. Следует из неравенства (I) теоремы 3.9, если произведение $\prod_{i=1}^{n}(\overline{\nu}^2_{in}+\Lambda^2_{in})^{1/2}$, которое в нашем случае будет стоять в правой части этого неравенства, заменить на

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\ln[1-F(|\overline{\nu}_{in}|,\quad\Lambda_{in})]\right\}$$

и воспользоваться неравенством $\ln(1+z)\leqslant z$. Также вытекают II из (II) утверждения 3.9, а IV — из (IV); в последнем случае арктангенс заменяется на аргумент, так как $\operatorname{arctg}|x|\leqslant|x|$, а $\sin\psi$ при $|\psi|\leqslant\pi/2$ есть неубывающая функция аргумента. Наконец, III получается из (III) с помощью предыдущего неравенства для арктангенса и следующего нетрудно проверяемого неравенства:

$$\ln(1-z)\geqslant z\frac{\ln(1-\varepsilon)}{\varepsilon}\quad\text{при}\quad 0\leqslant z\leqslant\varepsilon,\quad\forall\varepsilon>0,$$

с учетом того, что косинус на первом полупериоде есть убывающая функция аргумента. Доказательство закончено.

Первая ослабленная предельная теорема. Разные предположения относительно слагаемых X_{in} приводят к оценкам в виде неравенств для их гармонических или степенных средних и к «срабатыванию» тех или иных допредельных неравенств предыдущего раздела, правые части которых при устремлении $n\to\infty$ и дадут предельный закон нормированных сумм.

Теорема 3.13. *Пусть X_{in}, $i=1, \ldots, n$, независимы в каждой серии и выполняются три условия*

A°. $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{i=1,\ldots,n}\overline{M}X^2_{in}=0$;

Б°. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\overline{M}X^2_{in}=\overline{\sigma}^2$;

B°. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}|\overline{M}|\,X_{in}=m.$

Тогда при $n\to\infty$ их сумма $\sum X_{in}$ ИМ-сходится в с. в. ξ, определенную первичными средними:

$$|\overline{M}|\,\xi=m,\ \overline{M}\,\xi^2=m^2+\overline{\sigma}^2,$$

$$\underset{\sim}{M}\cos u\,\xi=\exp\left(-u^2\,\overline{\sigma}^2/2\right)\cos\Psi_\Sigma\,(u),$$

где $\Psi_\Sigma(u)=|u|m+c_*u^2\overline{\sigma}^2$, $c_*=0{,}3184$, а переменная и пробегает значения, заключенные неравенством $\Psi_\Sigma(u)\leqslant\pi/2$.

Доказательство. Степенные средние $|\overline{M}|\xi$ и $\overline{M}\xi^2$ получаются легко из соответствующих допредельных неравенств, доказанных выше. Обратимся к косинусоидальному направлению, отправляясь от основополагающей теоремы 3.12. Из неравенства $\cos y\geqslant 1-y^2/2$, согласно которому косинусоида мажорирует располагающуюся под ней параболу, подстановкой $y=uX_{in}$ и взятием среднего получаем

$$\underline{\nu}_{in}=\underset{\sim}{M}\cos(uX_{in})\geqslant 1-u^2\,\overline{M}X^2_{in}/2. \tag{3.13}$$

Из него следует: $F(\underline{\nu}_{in},\ \Lambda_{in})=1-\underline{\nu}^2_{in}-\Lambda^2_{in}\leqslant 1-\underline{\nu}^2_{in}\leqslant u^2\overline{M}X^2_{in}$ и $F_n\leqslant u^2\max\limits_{i}\overline{M}X^2_{in}$.

Из другого неравенства $|\sin y-y|\leqslant c_*y^2$, где $c_*=0{,}3184$ и равенство достигается при $y=3{,}124$ (показывается проверкой), подстановкой $y=uX_{in}$ и взятием среднего, находим

$$\Lambda_{in}\leqslant|u|\ |\overline{M}|\ X_{in}+c_*\,u^2\,\overline{M}X^2_{in}. \tag{3.14}$$

Используя оба полученных неравенства, выводим

$$\frac{\Lambda_{in}}{\underline{\nu}_{in}}\leqslant\frac{|u|\cdot|\overline{M}|\ X_{in}+c_*\,u^2\,\overline{M}X^2_{in}}{1-u^2\,\overline{M}X^2_{in}/2}.$$

Подстановка найденных неравенств в формулу III теоремы 3.12 с учетом $F_n\to 0$ (на основании A°) и пренебрежение членами второго порядка малости доказывает результат.

Для однородных внутри серий с. в. условия теоремы будет выполнены, если $|\overline{M}|X_{in}=m/n$ и $\overline{M}X^2_{in}=\overline{\sigma}^2/n$. Как видно, если $X_{in}=X_i/\sqrt{n}$, то условия теоремы достижимы лишь при $MX_i=0$ (иначе $m=\infty$).

Следствие 1. *Пусть $MX_i=0$, $\overline{M}X^2_i\leqslant\overline{\sigma}^2$. Тогда нормированная сумма $\sum X_i/\sqrt{n}$ при $n\to\infty$ ИМ-сходится в с. в. ζ, определенную первичными средними: $M\zeta=0$, $\overline{M}\zeta^2=\overline{\sigma}^2$, $\underset{\sim}{M}\cos u\zeta=\exp(-u^2\overline{\sigma}/2)\cos(0{,}3184u^2\overline{\sigma}^2)$ при и таких, что аргумент косинуса меньше $\pi/2$.*

Этот результат, кстати, может быть получен и из теоремы дополнения предыдущего параграфа.

Если усилить формировку, взяв $X_{in}=X_i/n$, то при $\overline{M}X^2_i<\infty$ будет $\overline{\sigma}^2=0$ и тогда получим:

Следствие 2. *Пусть $|\overline{M}|X_i=m$, $\overline{M}X^2_i<\infty$. Тогда среднее арифметическое $\sum X_i/n$ этих с. в. сходится в с. в. ξ, определенную первичными средними: $\overline{M}\xi^2=m^2$, $\underset{\sim}{M}\cos u\xi=\cos|u|m$ при $|u|m\leqslant\pi/2$.*

Отметим, что среднее $|\overline{M}|\xi=m$, вроде бы обязанное «перекочевать» из теоремы 3.13 в ее следствие, на самом деле поглощается средним $\overline{M}\xi^2=m^2$ благодаря неравенству $|\overline{M}|X\leqslant\sqrt{\overline{M}X^2}$ (следующему из неравенства Гельдера при $Y\equiv 1$).

Условия теоремы 3.13 так слабы, что позволили «сработать» лишь одному неравенству III допредельной теоремы 3.12. Пойдем дальше, вовлекая другие неравенства.

Вторая ослабленная предельная теорема. Определим те условия, при которых срабатывает неравенство I теоремы 3.12. Это неравенство инвариантно к сдвигам как суммы $\sum X_{in}+c$ на постоянную c, так и отдельных слагаемых, поэтому следует ожидать, что в условиях не требуется ограниченности суммы средних $\sum|\overline{M}|X_{in}$, но возникают дополнительные требования.

Теорема 3.14. *Пусть X_{in} независимы и пусть выполняются условия*: **а°**. $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{i=1,\dots,n}\overline{M}X^2_{in}=0$;

б°. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum(\overline{M}X^2_{in})^{3/2}=0$;

в°. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\underline{M}X^2_{in}\{|X_{in}|\le\delta\}=\underline{\sigma}^2,\ \forall\delta>0$.

Тогда

$$|\overline{M}|\cos\left(u\sum X_{in}+\varphi\right)\le\exp\{-(\underline{\sigma}^2-a^2)u^2/2\},\ \forall u,\varphi,$$

где $a^2=\lim\limits_{n\to\infty}\sum|\overline{M}|^2X_{in}$ (обозначено $|\overline{M}|^2X=(|\overline{M}|X)^2$).

Доказательство. Во-первых, из (3.13) видно, что неравенство $\min\limits_i\underline{\nu}_{in}(u)>0$ будет верно для тех u, при которых $u^2\max\limits_i\overline{M}X^2_{in}\le 2$, т. е. $u^2\le 2/\max\limits_i\overline{M}X^2_{in}$, а так как знаменатель первой части по условию а° стремится к 0 при $n\to\infty$, то в пределе оно будет верно для всех u, и следовательно, для всех u верно равенство $|\overline{\nu}_{in}|(u)=\overline{\nu}_{in}(u)$.

Из неравенства $\cos y\le 1-(1-\varepsilon^2/12)y^2\{|y|\le\varepsilon\}/2$, справедливого при любом $\varepsilon>0$, подставляя $y=uX_{in}$, получаем

$$1-\overline{\nu}_{in}(u)\ge\frac{u^2}{2}\left(1-\frac{\varepsilon^2}{12}\right)\underline{M}X^2_{in}\left\{|X_{in}|\le\frac{\varepsilon}{u}\right\}. \qquad (3.15)$$

Теперь подстановка полученного неравенства для $1-\overline{\nu}_{in}(u)$, а также неравенства (3.14) для Λ_{in} в правую часть I теоремы 3.12 и замена $\delta=\varepsilon/u$ с использованием $|\overline{M}|X\le\sqrt{\overline{M}X^2}$ дает после небольших упрощений

$$\sum F(|\overline{\nu}_{in}|,\Lambda_{in})\ge u^2\left(1-\frac{u^2\delta^2}{12}\right)\sum\underline{M}X^2_{in}\{|X_{in}|\le\delta\}-$$

$$-\frac{u^4}{4}\sum\left(\underline{M}X^2_{in}\right)^2-u^2\sum|\overline{M}|^2X_{in}-2c_*|u|^3\sum\left(\overline{M}X^2_{in}\right)^{3/2}-$$

$$-c_*^2u^4\sum(\overline{M}X^2_{in})^2.$$

В силу условия в° второй и два последних члена правой части последнего неравенства стремятся к 0. В результате произвольности δ имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sum F(|\overline{\nu}_{in}|,\Lambda_{in})\ge u^2(\underline{\sigma}^2-a^2)$$

и утверждение теоремы теперь следует из I теоремы 3.12, что и требовалось.

Следствие 1. *При условиях теоремы 3.14 сумма $\sum X_{in}$ ИМ-сходится в с. в. η, определенную первичными средними вида*

$$|\widetilde{M}|\cos(u\eta+\varphi)=\exp\{-(\underline{\sigma}^2-a^2)u^2/2\},\ \forall u,\varphi.$$

Следствие 2. *Пусть X_i, $i=1, 2, \dots$, независимы, пусть $|\overline{M}|X_i\le m$ и $\overline{M}X^2_i=\overline{\sigma}^2<\infty$, $\underline{M}X^2_i=\underline{\sigma}^2$. Тогда при $n\to\infty$ нормированная сумма $\sum X_i/\sqrt{n}$ ИМ-сходится в с. в. η, определенную в следствии 1 при $a=m$.*

В самом деле, для $X_{in}=X_i/\sqrt{n}$, как нетрудно убедиться, выполняются посылки **а°** и **б°** теоремы 3.14, а посылка **в°** следует из определения среднего для квадратичных (неограниченных) признаков как предела: $\underline{\sigma}^2=\lim\limits_{H\to\infty}\underline{M}X^2_i\{|X_i|\le H\}$ при $H=\delta\sqrt{n}$.

Последнее следствие наиболее полно раскрывает смысл второй предельной теоремы 3.14. Во-первых, не требуется, в общем, условия ограниченности элементов последовательности или аналога этого условия — непременного спутника классических предельных результатов. Кстати заметим, что среднеквадратическая ограниченность мощности $\overline{M}X^2_i=\overline{\sigma}^2$ — не эквивалент ограниченности самих с. в., пример тому — нормальная с. в. И во-вторых, нетривиальные оценки гармонических характеристик сумм могут быть получены и в том случае, когда средние с. в. являются интервальными, что имеет место для статистически неустойчивых последовательностей и интерпретируется как совершенно неконтролируемые и не связанные друг с другом скачки средних MX_i внутри интервала $-m$, m.

Нетривиальными результатами следствия будут лишь при $\underline{\sigma}>m$ (условие отрицательности показателя экспоненты в теореме 3.14), а именно, грубо говоря, когда случайный разброс слагаемых, т. е. их независимые колебания превышают неконтролируемые (неустойчивые) флуктуации средних. Собственно, в этом и в отсутствии ограничений на суммарное верхнее среднее и дисперсию состоит основное отличие второй предельной теоремы от первой.

Замечания. 1. Условия теоремы 3.14 не исключают неограниченности как абсолютного среднего $|\overline{M}|\sum X_{in}$ суммы, так и ее «мощности» $\overline{M}(\sum X_{in})^2$.

2. Условия **а°** и **б°** теоремы будут выполнены, если об X_{in} известно только, что они независимы и ограничены числами ε_n, т. е. $P(|X_{in}|<\varepsilon_n)=1$, причем $\varepsilon_n\to0$ при $n\to\infty$.

3. Если считать фиксированными $\lim\underline{M}\sum X_{in}$, $\lim\overline{M}\sum X_{in}$, $\lim\underline{M}(\sum X_{in})^2$, $\lim\overline{M}(\sum X_{in})^2$ и т. д., то $\sum X_{in}$ будет ИМ-сходиться в с. в. η_1, определенную помимо гармонических первичных средних теоремы 3.14 еще и первичными значениями $\underline{M}\eta_1$, $\overline{M}\eta_1$, $\underline{M}\eta^2_1$, $\overline{M}\eta^2_1$ и т. д., соответственно равными указанным пределам.

4. При $m=0$, $\overline{M}X^2_i\le\overline{\sigma}^2$, $X_{in}=X_i/\sqrt{n}$ результат совпадет со следствием 1 теоремы 3.13.

Исследуем с. в. η, определенную следствием 1 теоремы 3.14. Если $f(y)=\sum\limits_u A(u)\cos(uy+\varphi_u)$ есть разложение функции $f(y)$ в ряд Фурье, то

$$|\overline{M}|\, f(\eta) \leqslant \sum_u |A(u)| \exp\{-\underline{\sigma}^2 u^2/2\}$$

(при дискретах u, плотно заполняющих числовую ось, сумма заменяется на интеграл). Правая часть последнего неравенства дает оценки средних для произвольных признаков с. в. η.

Третья ослабленная предельная теорема. Посылки первой и второй предельных теорем во многом не перекрываются: нельзя сказать, какие из них более сильные, а какие более слабые. Объединение их ведет к следующей теореме (используются прежние обозначения).

Теорема 3.15. *Пусть выполняются условия $А°$, $Б°$ и $В°$ первой предельной теоремы 3.13 и условие* **в°** *второй — 3.14. Тогда сумма $\sum X_{in}$ ИМ-сходится в с. в. Y, определенную первичными средними на степенных признаках*

$$1.\ |\overline{M}|\, Y = m,\quad 2.\ \breve{M} Y^2 = m^2 + \overline{\sigma}^2;$$

и на гармонических

$$\text{I.}\ |\breve{M}| \cos(uY + \varphi) = \exp\{-(\underline{\sigma}^2 - a^2)\, u^2/2\},\ \forall u, \varphi;$$

$$\text{II.}\ \breve{M} \cos uY = \exp(-\underline{\sigma}^2 u^2/2);$$

$$\text{III.}\ \underset{\smile}{M} \cos uY = \exp\left(-\overline{\sigma}^2 u^2/2\right) \cos \Psi_\Sigma(u);$$

$$\text{IV.}\ |\breve{M}| \sin uY = \exp\{-(\underline{\sigma}^2 - a^2)\, u^2/2\} \sin \Psi_\Sigma(u);$$

где последние три соотношения даются при u, заключенном неравенством: $\Psi_\Sigma(u) = |u|\, m + c_* u^2 \overline{\sigma}^2 \leqslant \pi/2$.

Доказательство. Требуется установить лишь II и IV, так как все остальные следуют из предыдущих двух предельных теорем 3.13 и 3.14 (при этом условие б° в 3.14 есть следствие $А°$ и $Б°$ теоремы 3.13, поэтому выполняются все посылки двух теорем). Доказательство соотношения II получается вставлением неравенства (3.15) в неравенство II теоремы 3.12 и учета условия в°. Доказательство же IV в первом множителе правой части есть повторение доказательства I, а во втором — той части III, которая относилась к аргументу под знаком косинуса, что и требовалось.

Заметим, что не все фигурирующие в теореме 3.15 средние являются согласованными между собой, и их согласование — весьма трудоемкое занятие. Хотя этого в настоящий момент и не требуется.

Центральная теорема нормальной сходимости. Ключевыми для определения сходимости сумм к нормальной модели являются теорема 3.1 характеризации нормальной с. в. и теорема 3.2 ИМ-сходимости. Следуя им, нужно доказать, что: 1) правые части соотношений II и III теоремы 3.15 сходятся к одной и той же функции $\exp(-\sigma^2 u^2/2)$ (для этого должно быть $\sigma^2 = \overline{\sigma}^2 = \sigma^2$); 2) правая часть IV должна равняться 0 при всех u. Еще одно требование: $\Phi(H/\sigma) \leqslant \overline{P}(\sum X_{in} > H) \to 0$ при $H \to \infty$ автоматически верно на основании неравенства Чебышева и условия $Б°$.

Теорема 3.16. *Пусть X_{in} независимы, имеют нулевые средние $MX_{in} = 0$, точные дисперсии $MX^2_{in} = \sigma^2_{in}$, причем $\sum \sigma^2_{in} = \sigma^2 < \infty$; пусть дисперсии убывают $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{i=1,\dots,n} \sigma^2_{in} = 0$, и пусть выполняется условие Линдеберга — Феллера (ЛФ)* [1, с. 397]

$$\text{ЛФ}: \lim_{n\to\infty} \sum \overline{M} X^2_{in} \{|X_{in}| > \delta\} = 0,\ \forall \delta > 0.$$

Тогда $\sum X_{in}$ ИМ-сходится в нормальную с. в. $\mathcal{N}_{0,\sigma}$.

Доказательство. Проводится на основании теоремы 3.15. Во-первых, покажем, что $\Psi_\Sigma(u) \equiv 0$. В самом деле, из двух неравенств, верных при любом ε от 0 до 1:

$$|y - \sin y| \leqslant y^2\, \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^2} \quad \text{при} \quad |y| \leqslant \varepsilon,$$

$$|y - \sin y| \leqslant c_* y^2, \quad \forall y,$$

выводим

$$|y - \sin y| \leqslant y^2\, \frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^2} \{|y| \leqslant \varepsilon\} + c_* y^2 \{|y| > \varepsilon\}.$$

Раскрывая соответствующим образом модуль, подставляя $y = uX_{in}$ и беря среднее, получаем с учетом $MX_{in} = 0$:

$$\Lambda_{in} = |\overline{M}| \sin u X_{in} \leqslant u^2 \left[\frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^2}\, \overline{M} X^2_{in} \left\{|X^2_{in}| \leqslant \frac{\varepsilon}{u}\right\} + \right.$$

$$\left. + c_* \overline{M} X^2_{in} \left\{|X_{in}| > \frac{\varepsilon}{u}\right\}\right].$$

Теперь, принимая во внимание, что $\max\limits_i \underline{\nu}^2_{in} \to 1$ (вытекает из (3.13) и условия убывания дисперсии), имеем для $\Psi_\Sigma(u) = \sum \Lambda_{in}/\underline{\nu}_{in}$ в пределе при $n \to \infty$:

$$\Psi_\Sigma(u) \leqslant u^2 \left[\frac{\varepsilon - \sin \varepsilon}{\varepsilon^2}\, \sigma^2 + c_* \lim_{n\to\infty} \sum \overline{M} X^2_{in} \left\{|X_{in}| > \frac{\varepsilon}{u}\right\}\right],\ \forall \varepsilon > 0.$$

При любом $\varepsilon > 0$ в силу условия ЛФ последняя сумма стремится к 0. А первое слагаемое правой части стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$, поэтому и вся правая часть будет равна 0.

С учетом доказанного из неравенств II, III и IV теоремы 3.15 получаем нормальную сходимость гармонических средних, что и требовалось.

Следствие. *Пусть X_i, $i = 1, \dots, n$, независимы, имеют нулевые средние $MX_i = 0$ и точные дисперсии $MX^2_i = \sigma^2$* (понимаемые как пределы (1.4)) *и пусть выполняется условие* **У**1:

У1. $\lim\limits_{H\to\infty} H^2 \overline{P}(|X_i| > H) = 0$ *равномерно по i.*

Тогда нормированная сумма $\sum X_i/\sqrt{n}$ при $n \to \infty$ ИМ-сходится в $\mathcal{N}_{0,\sigma}$.

В самом деле, среднее неограниченного признака определяется как предел среднего от усеченного варианта этого признака, откуда для X^2 имеем:

$$\sigma^2 = \underline{M} X_i^2 = \lim_{H\to\infty} \underline{M}\left(X_i^2\right)^{(-H,\, H)}.$$

Далее, используя условие **У**1, получаем

$$\overline{M} X_i^2\{|X_i|>H\} = \overline{M}\left[X_i^2 - X_i^2\{|X_i|\leqslant H\}\right] \leqslant \overline{M} X_i^2 - \underline{M} X_i^2\{|X_i|\leqslant H\} \leqslant$$

$$\leqslant \sigma^2 - \underline{M}\left[\left(X_i^2\right)^{(-H,\, H)} - H^2\{|X_i|>H\}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \sigma^2 - \underline{M}\left(X_i^2\right)^{(-H,\, H)} + H^2\, \overline{P}(|X_i|>H)$$

и при устремлении H к ∞ правая часть стремится к 0. А тогда выполняется условие ЛФ:

$$\sum \overline{M}\,(X_i/\sqrt{n})^2\{|X_i|/\sqrt{n}>\delta\} \leqslant \max_i \overline{M} X_i^2\{|X_i|>\delta\sqrt{n}\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

и нормальная сходимость имеет место согласно теореме 3.16.

Смысл условия **У**1 в том, что вероятность превышений при увеличении уровня H должна уменьшаться быстрее значения $1/H^2$, предписанного неравенством Чебышева, что, конечно же, выполняется, если X_i ограничены одним числом.

В следствии требуется обязательная стационарность параметров $m=0$ и σ. К случаю, когда это требование не выполняется, сейчас и перейдем.

Интервальная нормальная сходимость. Основное препятствие в применениях теоремы нормальной сходимости состоит в требовании точного нулевого среднего слагаемых и точной дисперсии. Постараемся отказаться от этого требования, считая эти параметры неизвестными и меняющимися. Для этого пусть с. в. X_{in} раскрываются через некоторые «стандартные» независимые с. в. ξ_i с нулевыми средними и единичными дисперсиями

$$X_{in} = \sigma_i\, \xi_i/\sqrt{n} + m_i/n, \qquad M\,\xi_i = 0, \qquad M\,\xi_i^2 = 1, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Здесь ξ_i считаются свободными от параметров m_i, σ_i, тогда и X_{in} будут независимыми. Делением на $\sqrt{n}$ и n уже учтена потребная для нормальной сходимости скорость убывания среднего и дисперсии X_{in} при $n\to\infty$.

Использованное нами представление называется *аддитивно-мультипликативным*. Хотя, в общем, оно является весьма специфичным, но для предельных теорем оно как раз оказывается универсальным. Дело в том, что для нормальной сходимости основным является выполнение условия ЛФ, базирующегося на следующем наборе признаков $X^2{}_{in}\{|X_{in}|>\delta\}$, $\forall\delta>0$. А этот-то набор признаков в асимптотике с учетом малости m_i/n пересчитывается в такого же типа набор, но уже с. в. $\xi_i : \xi^2{}_i\{|\xi_i|>\delta\sqrt{n}/\sigma\}$. Поэтому, считая для ξ_i первичными именно средние от этих признаков, дополненные $M\xi_i=0$, $M\xi^2{}_i=1$, получаем расширение: $X_{in}\subseteq$ $\subseteq\sigma_i\xi_i/\sqrt{n}+m_i/n$. Применим к правой части предельные результаты, и мы придем к теореме.

16

Теорема 3.17. *Пусть $X_{in}\subseteq\sigma_i\xi_i/\sqrt{n}+m_i/n$, $i=1, \ldots, n$, где ξ_i независимы с нулевыми средними $M\xi_i=0$ и единичными дисперсиями $M\xi^2{}_i=1$ и свободны от параметров m_i и σ_i, меняющихся в отрезках $[\underline{m}_i, \overline{m}_i]$ и $[\underline{\sigma}_i, \overline{\sigma}_i]$. Пусть все ξ_i удовлетворяют условию* **У**1 *следствия, и пусть $\overline{\sigma}_i$ ограничены сверху: $\overline{\sigma}^2{}_i\leqslant b<\infty$. Тогда $\sum X_{in}$ ИМ-сходится в нормальную модель $\mathcal{N}_{\underline{m},\, \overline{m},\, \underline{\sigma},\, \overline{\sigma}}$ с интервальными средним $\underline{m}$, $\overline{m}$ и дисперсией $\underline{\sigma}^2$, $\overline{\sigma}^2$, равными средним арифметическим от тех же параметров слагаемых.*

Доказательство. Покажем, что при фиксированных векторах $\mathbf{m}=(m_1, \ldots, m_n)$ и $\boldsymbol{\sigma}^2=(\sigma^2{}_1, \ldots, \sigma^2{}_n)$, компоненты которых лежат в своих интервалах, условие ЛФ выполняется. Используя элементарное неравенство $(a+c)^2\leqslant$ $\leqslant 2a^2+2c^2$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \sum \overline{M}_{\mathbf{m},\, \boldsymbol{\sigma}} \left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}\xi_i + \frac{m_i}{n}\right)^2 \left\{\left|\frac{\sigma_i}{\sqrt{n}}\xi_i + \frac{m_i}{n}\right| > \delta\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} n \max_i \left(2\,\frac{\sigma_i^2}{n}\,\overline{M}\,\xi_i^2\left\{|\xi_i| > \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma_i}\right\} + 2\,\frac{m_i^2}{n^2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant 2\, b \lim_{H\to\infty} \overline{M}\,\xi_i^2\{|\xi_i|>H\} = 0,$$

где мы заменили $H=\delta\sqrt{n/b}$ и пренебрегли членами, стремящимися к нулю. Индексы $\mathbf{m}$ и $\boldsymbol{\sigma}$ у $\overline{M}$ соответствуют последовательно сначала $\mathbf{m}$, а затем $\boldsymbol{\sigma}$-сечению модели $\mathcal{M}^{\mathbf{X}}$ вектора $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, поэтому согласно теореме о представлении имеем $\mathcal{M}^{\mathbf{X}}\subset\bigvee\limits_{\mathbf{m}}\bigvee\limits_{\boldsymbol{\sigma}} M^{\mathbf{X}}_{\mathbf{m},\, \boldsymbol{\sigma}}$, и также для суммы $\mathcal{M}^{\Sigma}=\bigvee\limits_{m}\bigvee\limits_{\sigma}\mathcal{M}^{\Sigma}_{m,\, \boldsymbol{\sigma}}$ где $m=\Sigma m_i/n$, $\sigma^2=\Sigma\sigma^2{}_i/n$. Установив выше условие ЛФ, мы доказали $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{M}^{\Sigma}_{m,\, \sigma}\subset\mathcal{N}_{m,\, \sigma}$, поэтому и $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{M}^{\Sigma}\subset\mathcal{N}_{\underline{m},\, \overline{m},\, \underline{\sigma},\, \overline{\sigma}}$, что и требовалось.

В условиях теоремы ничего не надо было знать о связи элементов m_i, σ_i, $i=1, 2, \ldots$, между собой. Это могут быть стационарные параметры, тогда $m_i=m$, $\sigma_i=\sigma$, $\forall i$, что соответствует одинаковым средним и дисперсиям для X_{in} при $i=1, \ldots, n$, но не известным и принадлежащим своим интервалам. Это могут быть и полностью нестационарные параметры, когда m_i и σ_i несвязанно друг от друга и неконтролируемым образом «скачут» внутри своих интервалов. Случай, соответствующий неустойчивой выборке.

Наиболее жестким является требование теоремы 3.17, чтобы средние m_i/n слагаемых скоро стремились к 0 при росте n, причем в $\sqrt{n}$ раз быстрее, чем сходится к 0 параметр разброса $\sigma_i/\sqrt{n}$. Нетрудно убедиться, что это условие может быть ослаблено, и теорема останется верной, если абсолютные средние $|\overline{M}|X_{in}$ слагаемых убывают не со скоростью $1/n$, а гораздо медленнее, а именно, $|\overline{M}|X_{in}\sim 1/n^{\alpha}$, где α — любое число из $1/2<\alpha\leqslant 1$. Тогда при $\alpha<1$ средние арифметические $\underline{m}=\Sigma\underline{M}X_{in}/n$, $\overline{m}=\Sigma\overline{M}X_{in}/n$, одна, другая или обе вместе могут вырождаться в бесконечность. Это не должно смущать, так как, например, при $\underline{m}=-\infty$, $\overline{m}=\infty$ предельной будет нормальная модель $\mathcal{N}_{\underline{\sigma},\overline{\sigma}}$, соответствующая полностью неизвестному среднему и рассмотренная в § 3.1, а она еще далеко не голая модель. Возможны также варианты $\underline{m}=\overline{m}=\infty$, $\underline{m}=\overline{m}=-\infty$ и любые промежуточные случаи, когда одна из границ конечна.

И все равно, несмотря на сказанное, так как неравенство $\alpha>1/2$ должно быть строгим, для нормальной сходимости необходимым является требование малости средних: средние должны стремиться к 0 быстрее, чем средние квадратические отклонения. Иначе нормальной сходимости не будет и допустимы лишь слабые предельные результаты, на связь с которыми мы и укажем.

В случае интервальной нормальной модели Y имеем:

$$\overline{M} f(Y)=\sup_{m} \sup_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\{-(y-m)^2/(2\sigma^2)\}\,dy$$

для всех интегрируемых (по Риману) функций, где m и σ пробегают свои интервальные значения. Обозначив $m_*=\max\{|\underline{m}|, |\overline{m}|\}$, имеем

$$|\overline{M}|\,Y=m_*,\ \overline{M}Y^2=m_*^2+\overline{\sigma}^2,$$

$$\underline{M}\cos u\,Y=\exp\left(-\overline{\sigma}^2 u^2/2\right)\cos(um_*) \text{ при } |u|\leqslant\pi/(2m_*).$$

Эти значения нужно сравнить с первой предельной теоремой 3.13, где получены почти такие же первичные признаки предельной с. в. ξ. Почти, но не совсем, так как условия теоремы 3.13 слабее: в них нет требования ЛФ и, следовательно, не будет интервального нормального закона. И как видно, нижнее среднее для косинуса там получается менее точным.

Аналогичное замечание можно сделать по отношению к другим слабым предельным теоремам. Таким образом, основное усиление теоремы интервальной нормальной сходимости в отличие от слабых предельных теорем обязано именно условию ЛФ и требованию малости средних.

Дополнения.

1. Предельная модель при ограниченности средних модулей слагаемых. Везде в предельных результатах требовалась ограниченность $\overline{M}X^2_{in}$. А что, если эти значения не даны? Теоретически они вправе быть бесконечными, если $x^2\notin\mathcal{F}^{X_i}$. Насколько предельные модели сумм будут зависеть от существования $\overline{M}X^2_{in}$? А если вместо них заданы $\overline{M}|X_{in}|$, то что будет? На эти вопросы проливают свет следующие две теоремы.

Теорема. *Пусть* X_{in} *независимы и при* $n\to\infty$: А) $\max_i \overline{M}|X_{in}|\to 0$, Б) $\Sigma\overline{M}|X_{in}|\to a$. *Тогда при* $u\leqslant\pi/(2a)$ *справедливы два неравенства:*

$$\lim_{n\to\infty} \underline{M}\cos(u\Sigma X_{in})\geqslant\exp\{-c_0|u|\,a\}\cos(ua);$$

$$\lim_{n\to\infty} |\overline{M}|\sin(u\,\Sigma X_{in})\leqslant\sin(|u|a);$$

где $c_0=0{,}725$.

Доказательство. Из неравенств $1-\cos x\leqslant c_0|x|$ (где $c_0=0{,}725$ есть постоянная, которая находится, как решение относительно c_0 и x_0 системы уравнений: $\sin x_0=c_0$, $c_0x_0=1-\cos x_0$) и $|\sin x|\leqslant|x|$, подставляя $x=uX_{in}$ и беря среднее, получаем

$$1-\underline{\nu}_{in}(u)\leqslant c_0|u|\,\overline{M}|X_{in}|,\quad \Lambda_{in}(u)\leqslant|u|\,\overline{M}|X_{in}|.$$

Теперь на основании неравенств

$$\Psi_{\Sigma}(u)\leqslant\frac{|u|}{\min_i \underline{\nu}_{in}(u)}\Sigma\overline{M}|X_{in}|=\frac{a|u|}{1-|u|\,c_0\max_i\overline{M}|X_{in}|};$$

$$\Sigma F(\underline{\nu}_{in},\ \Lambda_{in})\leqslant 2\Sigma(1-\underline{\nu}_{in}(u))\leqslant 2c_0|u|\,\Sigma\overline{M}|X_{in}|;$$

$$F_n=\max_i F(\underline{\nu}_{in},\ \Lambda_{in})\leqslant c_0|u|\max_i\overline{M}|X_{in}|,$$

подставляя которые в неравенство III допредельной теоремы 3.12, получаем при переходе к пределу $n\to\infty$ первый результат теоремы. Второй результат получается из неравенства IV теоремы 3.12, если учесть в пределе $\Sigma\Lambda_{in}/\overline{\nu}_{in}\to\Sigma\Lambda_{in}\leqslant|u|\Sigma\overline{M}|X_{in}|\to|u|a$ и монотонность синуса при $|u|a\leqslant\pi/2$, что и требовалось.

Следствие. *Пусть* X_i *независимы и* $\overline{M}|X_i|=a$. *Тогда* $\Sigma X_i/n$ *при* $n\to\infty$ *ИМ-сходится в с. в.* Z, *определенную первичными средними:* $|\overline{M}|Z=a$, $\underline{M}\exp(uZ)=\exp(-|u|a)$, $\underline{M}\cos uZ=\exp(-c_0|u|a)\cos ua$, $|\overline{M}|\sin uZ=\sin|u|a$ *при* $|u|\leqslant\pi/(2a)$.

Этот результат должен рассматриваться вместе с теоремой 3.7 о сходимости среднего арифметического. Основная особенность в том, что при столь слабых условиях, как ограниченность средних абсолютных значений слагаемых, для получения сходящейся суммы нормировать X_i нужно не множителем $1/\sqrt{n}$, как в предельных теоремах, а множителем $1/n$, и при этом сходимость будет не к постоянному числу, как в законе больших чисел, а ИМ-сходимость в с. в. Z.

2. Слабейший предельный результат. Пусть не только $\overline{M}X^2_{in}$, но и $\overline{M}|X_{in}|$ не являются ограниченными. Оказывается, и в этом случае предельная модель все еще не будет тривиально голой.

Теорема. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots,$ *есть последовательность независимых с. в. и пусть* $\underline{M}X_i=\underline{m}$, $\overline{M}X_i=\overline{m}$. *Тогда при* $n\to\infty$ *среднее арифметическое* $\Sigma X_i/n$ *ИМ-сходится в с. в.* ζ *(т. е.* $\lim\mathcal{M}\subset\mathcal{M}^{\zeta}$*), определенную первичными средними:*

$$\underline{M}\zeta=\underline{m},\quad \overline{M}\zeta=\overline{m},$$

$$\underline{M}\exp(u\zeta)=\exp(u\underline{m}),\quad \underline{M}\exp(-u\zeta)=\exp(-u\overline{m}),\quad \forall u\geqslant 0.$$

Доказательство. Из неравенства $\exp x\geqslant 1+x$ получаем $\underline{M}\exp(uX)\geqslant 1+\underline{M}uX$. Далее на основании независимости X_i имеем

$$\underline{M}\exp\Big(u\sum_i X_i/n\Big)=\underline{M}\prod_i\exp(uX_i/n)\geqslant\prod_i\underline{M}\exp(uX_i/n)\geqslant(1+\underline{M}uX_i/n)^n.$$

Переходя к пределу $n\to\infty$ и используя классическую формулу Эйлера, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\underline{M}\exp\Big(u\,\Sigma X_i/n\Big)\geqslant\exp(\underline{M}uX_i)\geqslant\begin{cases}\exp(u\underline{m}), & u>0,\\ \exp(u\overline{m}), & u<0,\end{cases}$$

что и требовалось.

3. На прямое разложение моментов сумм опирается следующее утверждение. *Пусть* X_{in} *независимы, симметричны, ограничены и пусть существуют* ε *и* H *такие, что* $\varepsilon \leqslant n\overline{M}X^2_{in} \leqslant H$, $\forall in$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \overline{M}(\sum X_{in})^{2k} \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\sum \overline{M}X_{in}^2\right)^k (2k)!/(k!2^k).$$

3.5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Если в предыдущих двух главах рассматривались общие пространства исходов, то здесь и далее — числовые пространства. Результатами случайных явлений будут случайные величины (с. в.), последовательности, затем процессы. Исходы теперь уже будут связываться не только множественными отношениями, но и числовыми: их можно упорядочивать, складывать между собой, умножать на скаляр, преобразовывать по правилам действия с числами, векторами, функциями. Такие возможности реализуются как в новых способах задания с. в. и последовательностей (см. § 3.1), так и новых формах представлений.

Случайные величины (и последовательности) в общей конструкции задаются средними признаков, а признаками являются всевозможные преобразования на числовой прямой — функции одной (многих) переменных. В том числе те неограниченные, которые мажорируются первичными. Вот почему не всегда существует как среднее самой с. в., ибо признаки в виде тождественного преобразования прямой не являются ограниченными, так и моменты, в частности, среднеквадратическое значение (при точном среднем — дисперсия).

Самым распространенным представителем с. в. является нормальная, в нашей конструкции задаваемая тремя эквивалентными способами, тремя разными наборами средних: 1) с помощью плотности, следовательно, вероятностями отрезков; 2) моментами; 3) гармоническими средними в виде характеристической функции. В направлении этих наборов и удобно судить о степени приближения к нормальной с. в.

Нужда предельных результатов, составляющих наиболее весомую часть главы, потребовала определить понятия сходимости моделей (ИМ-сходимости), состоящей в приближении средних одной модели к другой. Главная причина введения ИМ-сходимости состоит в ее нацеленности на предельные результаты для сумм независимых с. в. В частности, с ее помощью формулируется закон больших чисел применительно к статистически неустойчивым последовательностям (теорема 3.7).

Все давно привыкли, что при сложении независимых с. в. вправе ожидать нормального предельного закона, полагая при этом выполненными известные условия Линдеберга — Феллера. А если эти условия не выполняются, что вполне естественно при их исходной жесткости, состоящей в точном знании средних слагаемых и их дисперсий, а также неограниченном росте их числа? Представьте на миг, что средние слагаемых не совсем точные, т. е. хоть да чуть-чуть, а интервальные, и тут же окажетесь в тупиковой ситуации, так как средним нормированных сумм станет разбегающийся по ширине интервал, и предел просто теряется. Потеряется в рамках классического подхода, но не интервального, способного охватить любые промежуточные случаи, причем даже для конечных сумм, т. е. допредельного случая.

Вообще допредельные и предельные результаты важны потому, что операция суммирования самопроизвольно участвует в практике рождения многих с. в. Так, погрешность изготовления детали есть результат наложения друг на друга разных факторов. Сложение лежит в корнях процедуры фильтрации и т. д. И полезно знать, что не только данные о признаках слагаемых (в частности, вероятностях, среднем с. в.) переносятся по соответствующим формулам на суммы, но и само суммирование полагает внутри себя уточнение средних по характерным направлениям, даваемое степенными и гармоническими признаками. Такие направления универсальны в силу сугубо арифметических свойств, проявляемых при подстановке на место аргумента сумм. Их средними будут границы моментов, гармонические средние, при точных распределениях вероятностей объединяемые в характеристическую функцию (для нас не нужную).

В зависимости от числа слагаемых и данных о них для сумм получаются то более, то менее широкие интервальные модели, определяемые своими средними по универсальным направлениям как степенным, так и гармоническим. Интересно проследить, как характер данных о слагаемых влияет на ширину допредельной и предельной моделей. И как в крайнем случае точных данных, удовлетворяющих классическим условиям, предельной станет нормальная модель (см. теорему 3.17).

Изложение результатов построено так, что сначала в § 3.3 рассматривается случай однородных слагаемых, позволяющий вникнуть в суть, а затем в § 3.4 переносится на неоднородные суммы общего вида, где закономерности более общие, но и более сложные. Новые допредельные и предельные утверждения позволяют в полном объеме в терминах ИМ выявить вытекающие из суммирования данные еще задолго до того, как суммы стали предельно нормальными, и даже если таковыми в пределе не смогут стать.