Глава 2.
СОВМЕСТНЫЙ АНАЛИЗ

2.1. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИСХОДОВ

Отображения. Определив интервальные модели и их свойства, пойдем дальше. Посмотрим, как они видоизменяются в смысле деформации признаков и их средних при преобразованиях пространства $\mathscr{X}$. Для этого классифицируем сначала сами преобразования.

Преобразование s пространства $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$

$$\mathscr{X}\xrightarrow{s}\mathscr{Y}$$

есть математическая запись реальных отношений между исхода-

ми на $\mathscr{X}$ и на $\mathscr{Y}$. Если $y=\mathrm{s}x$ — функция, однозначно отображающая каждый исход $x\in\mathscr{X}$ в исход $y\in\mathscr{Y}$, то преобразование называется *детерминированным*.

Указав, как детерминированное s преобразует исходы, рассмотрим, как при этом преобразуются признаки, но не все, а пока только их частный класс — события. Здесь нет трудностей: $A\subset\mathscr{X}$ преобразуется в $B=\{y:y=\mathrm{s}x,\ x\in A\}$ — это множество значений, которые принимает $y=\mathrm{s}x$, когда x пробегает значения из A. Пишем формально $B=\mathrm{s}A$ и будем называть B *образом* события A. Каждое событие A на $\mathscr{X}$ имеет свой образ B на $\mathscr{Y}$.

Свойства образов. Образ объединения двух и более событий из $\mathscr{X}$ равен соответственно объединению их образов на $\mathscr{Y}$: $\mathrm{s}(A_1\cup A_2)=\mathrm{s}A_1\cup\mathrm{s}A_2$.

Образом пустого множества будет пустое множество: $\mathrm{s}\varnothing=\varnothing$. Образом $\mathscr{X}$ будет, в общем, часть $\mathscr{Y}$, тогда говорим, что s есть отображение *$\mathscr{X}$ внутрь, или в $\mathscr{Y}$*. Если же образом $\mathscr{X}$ является все $\mathscr{Y}$ (это нетрудно сделать, исключив из $\mathscr{Y}$ те элементы, которые не входят в область значений sx), то s есть отображение *$\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$*, что ниже и считается.

Включению событий соответствует включение их образов: $A_1\subset A_2\Rightarrow\mathrm{s}A_1\subset\mathrm{s}A_2$. То же верно для дополнения (если s есть отображение $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$): $\mathrm{s}A^c=(\mathrm{s}A)^c$. И чего нельзя сказать для пересечения: два непересекающихся события, скажем x_1 и x_2, могут отображаться в одно, как это видно из рис. 2.1.

Обозначим все элементы x, отображающиеся в точку y, через $A_y=\mathrm{s}^{-1}y=\{x:\mathrm{s}x=y\}$ и назовем прообразом или *изображением точки y*. *Изображением* $\mathrm{s}^{-1}B$ *события* $B\in\mathscr{Y}$ будет объединение изображений точек, входящих в B: $A_B=\bigcup_{y\in B}A_y=\{x:\mathrm{s}x\subset B\}$. Непересекающимся B_1 и B_2 соответствуют непересекающиеся изображения $\mathrm{s}^{-1}B_1$ и $\mathrm{s}^{-1}B_2$, а алгебраическим операциям над ними — такие же операции над их изображениями. Множества $\mathrm{s}^{-1}y\subset\mathscr{X}$ в результате не пересекаются и s можно рассматривать как взаимно-однозначное соответствие точек y пространства $\mathscr{Y}$ и подмножеств A_y пространства $\mathscr{X}$: $A_y\leftrightarrow y$, или соответствие $\bigcup_{y\in B}A_y\leftrightarrow B$, приводящее к идентичности (изоморфизму) двух алгебр событий:

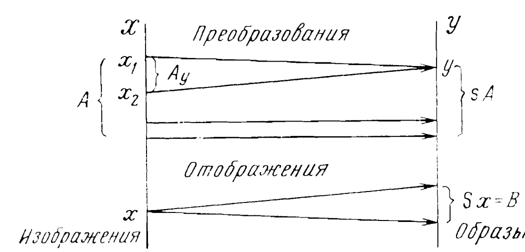


Рис. 2.1. Преобразования и отображения

алгебры $\mathscr{A}$ на $\mathscr{X}$, порожденной событиями A_y, и алгебры всех событий на $\mathscr{Y}$, обозначаемой $2^{\mathscr{Y}}$. Эти алгебры $\mathscr{A}\leftrightarrow 2^{\mathscr{Y}}$ изоморфны в том смысле, что алгебраические отношения и действия над множествами одной из них зеркально отображаются на отношения и такие же действия над другой.

Обобщим понятие преобразования, подводя его к изоморфизму двух произвольных алгебр событий. Для этого будем понимать S (обозначается в отличие от преобразования заглавной буквой) как отображение, при котором каждая точка x переходит, в общем, в подмножество $\mathrm{S}x=B_x$ пространства $\mathscr{Y}$, причем: а) для различных $x_1\neq x_2$ множества $\mathrm{S}x_1=B_1$ и $\mathrm{S}x_2=B_2$, в которые отображаются эти точки, либо совпадают между собой, либо не пересекаются; б) $\mathrm{S}\mathscr{X}=\bigcup \mathrm{S}x=\mathscr{Y}$. Равенство $\mathrm{S}x=B_x$ понимается как неясность, сомнение, куда из множества B_x попадет точка x, и в этом смысле S расплывчато.

Отображение S любые события из $\mathscr{X}$ переводит в события из $\mathscr{Y}$: $\mathrm{S}A=\bigcup_{x\in A}\mathrm{S}x$, и обратно: $\mathrm{S}^{-1}B=\{x:\mathrm{S}x\subset B\}$. В нашем широком понимании для любого S обратное S^{-1} всегда определено. При повторных прямом и обратном отображениях $\mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}A$ события, в общем, смазываются, становятся шире A, кроме некоторых из событий, представляющих наибольший интерес, так как именно они полностью характеризуют S. Это класс $\mathscr{A}_\mathrm{S}$ всех тех событий на $\mathscr{X}$ (и его образ $\mathscr{B}_\mathrm{S}$ на $\mathscr{Y}$), которое при прямом и затем обратном отображении «остаются четко на месте»:

$$\mathscr{A}_\mathrm{S}=\{A:\mathrm{S}^{-1}\,\mathrm{S}A=A\}\xleftrightarrow{\mathrm{S}}\mathscr{B}_\mathrm{S}=\{B:B=\mathrm{S}\mathrm{S}^{-1}\,B\}.$$

Характерна однозначная связь: $A\leftrightarrow \mathrm{S}A=B$, $\mathrm{S}^{-1}B=A\leftrightarrow B$, индуцирующая две изоморфные алгебры $\mathscr{A}_\mathrm{S}\leftrightarrow\mathscr{B}_\mathrm{S}$, где $\mathscr{B}_\mathrm{S}$ есть образ $\mathscr{A}_\mathrm{S}$. Атомами алгебр являются $B_x=\mathrm{S}x$, $x\in\mathscr{X}$, для $\mathscr{B}_\mathrm{S}$ и $A_x=\mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}x$ для $\mathscr{A}_\mathrm{S}$. Если переобозначить их B_z, A_z, объединив совпадающие между собой B_x (и A_x) под одним индексом z, то S можно интерпретировать как взаимно-однозначное соответствие $A_z\leftrightarrow B_z$.

Итак, любое отображение S индуцирует изоморфные алгебры $\mathscr{A}_\mathrm{S}$ и $\mathscr{B}_\mathrm{S}$ и полностью определяется ими. В то же время любому изоморфизму можно подыскать соответствующее отображение S, понимая его как отображение событий из $\mathscr{X}$ (атомов A_z) в события из $\mathscr{Y}$ (атомы B_z).

Алгебры $\mathscr{A}_\mathrm{S}$ и $\mathscr{B}_\mathrm{S}$ охватывают те события, которые остаются четкими при преобразованиях. Через них могут быть определены образы (и изображения) всех остальных событий по формулам:

$$\mathrm{S}A=\bigcap_{\substack{A'\in\mathscr{A}_\mathrm{S}\\ A'\supset A}}\mathrm{S}A';\quad \mathrm{S}^{-1}B=\bigcap_{\substack{B'\in\mathscr{B}_\mathrm{S}\\ B'\supset B}}\mathrm{S}^{-1}B'.$$

Преобразования признаков. Мы рассмотрели, как отображениями преобразуются события. Теперь обратимся к преобразованию признаков; установим, как одни из них при отображении переходят в другие.

Числовая функция $f(x)$, измеримая относительно индуцированной отображением S алгебры $\mathscr{A}_\mathrm{S}$ событий, называется *S-представимым признаком*. Если понимать функцию f широко как отображение событий A в подмножества $f(A)=\{f(x):x\in A\}$ числовой прямой, то для S-представимых признаков $f(A)\equiv f(\mathrm{S}^{-1}\mathrm{S}A)$, $\forall A$, что эквивалентно может быть взято за их определение; эти признаки принимают постоянные значения на «атомах» A_z алгебры $\mathscr{A}_\mathrm{S}$. Класс всех S-представимых признаков обозначим $\mathscr{F}_\mathrm{S}$. В него, очевидно, входят все индикаторные функции событий $\mathscr{A}_\mathrm{S}$.

Класс $\mathscr{F}_\mathrm{S}$ линеен и замкнут относительно любых арифметических действий, т. е. преобразование $\mathrm{F}(f_1, f_2, \ldots)$ признаков из этого класса приводит к признакам из него же (можно допускать бесконечные значения признаков).

Каждый S-представимый признак имеет четко свой *образ* $\varphi(y)=f(\mathrm{S}^{-1}y)$ (или $\varphi(B)=f(\mathrm{S}^{-1}B)$), который является в свою очередь $\mathscr{B}_\mathrm{S}$-измеримой функцией, или же, что то же самое, S^{-1}-представимым признаком $\varphi(B)\equiv\varphi(\mathrm{S}\mathrm{S}^{-1}B)$. Класс всех таких признаков обозначим $\Phi_{\mathrm{S}-1}$.

Класс $\mathscr{F}_\mathrm{S}$ и его образ $\Phi_{\mathrm{S}-1}$ взаимно-однозначно связываются между собой: $\mathscr{F}_\mathrm{S}\leftrightarrow\Phi_{\mathrm{S}-1}$ сохраняя упорядоченность функций: $f_1\geqslant f_2\Leftrightarrow\varphi_1\geqslant\varphi_2$, где $f_1\leftrightarrow\varphi_1$, $f_2\leftrightarrow\varphi_2$; и идентичность арифметических действий: $\mathrm{F}(f_1, f_2, \ldots)\leftrightarrow\mathbf{F}(\varphi_1, \varphi_2, \ldots)$. Например, образом линейной комбинации $c+\sum c_i f_i(x)$, $f_i\in\mathscr{F}_\mathrm{S}$, будет линейная комбинация образов $c+\sum c_i\varphi_i(y)$, $\varphi_i\in\Phi_{\mathrm{S}-1}$, $f_i\Leftrightarrow\varphi_i$.

Заметим, что если $y=\mathrm{s}x$ есть детерминированные преобразование, то $\Phi_{\mathrm{S}-1}$ — это вообще любые функции переменной y, а $\mathscr{F}_\mathrm{S}$ — это множество функций вида $f(x)=\varphi(\mathrm{s}x)$.

Все S-представимые признаки и их образы дадут те, грубо говоря, «направления», по которым будет производиться расчет средних ИМ при отображениях S.

Расчет средних. Пусть на $\mathscr{X}$ задана ИМ $\mathscr{M}^x$ с областью $\mathscr{F}$ существования верхних средних $\overline{M}f$, $f\in\mathscr{F}$, и S есть отображение $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$. Требуется рассчитать соответствующую ИМ $\mathscr{M}^y$ на $\mathscr{Y}$, которую записываем $\mathscr{M}^y=\mathrm{S}\mathscr{M}^x$. Какие данные о средних $\overline{M}\varphi$ на $\mathscr{Y}$ будут иметься? Что при этом теряется?

Для S-представимых признаков f ровно ничего:

$$\overline{M}\,\varphi=\overline{M}f,\quad \varphi\leftrightarrow f\in\mathscr{F}_\mathrm{S}\cap\mathscr{F}, \tag{2.1}$$

и средние однозначно переносятся на их образы. Это очевидно, так как $\varphi(y)$ полностью повторяют значения $f(x)=\varphi(\mathrm{S}x)$.

Первичными для преобразованной ИМ $\mathscr{M}^y=\mathrm{S}\mathscr{M}^x$ будут средние (2.1). Они согласованы на $\mathscr{B}_\mathrm{S}$ в силу их согласованности на $\mathscr{A}_\mathrm{S}$ и изоморфизма этих алгебр.

Последовательность этапов для определения $\mathscr{M}^y$ следующая:

1) сначала об $\mathscr{M}^x$ оставляются только сведения о средних подкласса S-представимых признаков $\mathscr{F}_S$, что соответствует $\mathscr{F}_S$-расширению $\mathscr{M}^x$;

2) средние с $\mathscr{F}_S$ переносятся на их образы по формуле (2.1), образуя первичные значения для $\mathscr{M}^y$;

3) наконец, первичные значения продолжаются на произвольные признаки.

Из сказанного следует, что будь на $\mathscr{X}$ задана $\mathscr{M}^x$, или ее $\mathscr{F}_S$-расширение $\langle \overline{M}^x\mathscr{F}_S\rangle$, итоговая $\mathscr{M}^y = S\mathscr{M}^x$ будет одной и той же. Средние только S-представимых признаков участвуют в расчете $\mathscr{M}^y$; остальные же «смазываются», теряют свои собственные средние и переходят в «подчинение» к набору $\overline{M}\mathscr{F}_S = \{\overline{M}f_S : f_S \in \mathscr{F}_S\}$.

Потерь, очевидно, не будет в том случае, если $\overline{M}\mathscr{F}_S$ определяют однозначно модель $\mathscr{M}^x$, т. е. ее первичные признаки $g \in \mathscr{G}$ все S-представимы: $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}_S$. Тогда $\mathscr{F}_S$-расширение $\mathscr{M}^x$ совпадет с $\mathscr{M}^x$, а первичными для $\mathscr{M}^y$ будут образы $g \in \mathscr{G}$ с теми же, как у $\mathscr{M}^x$, средними, так что между первичными признаками и средними $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$ устанавливается тождественная связь. Расчет средних производится уже не в три этапа, как выше указывалось, а в два, так как здесь $\mathscr{F}_S$ можно заменить на $\mathscr{G}$ и первый этап вырождается.

Пример 2.1. Пусть $\mathscr{X} = \mathscr{R}$ — числовая ось, и пусть $y = x^2$ — преобразование. Тогда $\mathscr{Y} = \mathscr{R}^+$ — полуось и средние $\overline{M}\varphi(Y)$ (для удобства случайные величины обозначаются заглавными буквами), определяющие $\mathscr{M}^y$, выражаются через средние $\mathscr{M}^x$ по формуле (2.1): $\overline{M}\varphi(Y) = \overline{M}\varphi(X^2)$. Например, $\overline{M}Y = \overline{M}X^2$, $\overline{M}Y^2 = \overline{M}X^4$, $\overline{M}\cos Y = \overline{M}\cos X^2$ и т. д. Правые части рассчитываются на основании первичных данных о $\mathscr{M}^x$. Потерь при преобразовании не будет, если только первичные признаки $\mathscr{M}^x$ записываются сами через x^2. Скажем, $\mathscr{M}^x$ определена значениями $\overline{M}X^2$, $\overline{M}X^4$. Тогда $\mathscr{M}^y$ будет определена первичными значениями $\overline{M}Y = \overline{M}X^2$ и $\overline{M}Y^2 = \overline{M}X_4$, а все остальные $\overline{M}\varphi(Y)$, например, $\overline{M}\cos Y$, рассчитываются по ним или непосредственно переносятся как средние изображений $\overline{M}\varphi(X^2)$, например $\overline{M}\cos X^2$.

Пример 2.2. Детерминированные преобразования случайного процесса. Пусть X_t — процесс, определенный своими средними $\overline{M}f\{X_t\}$, где $f\{X_t\}$ — функционалы от X_t, и пусть S — его преобразование в $Y_t = SX_t$. Это может быть нелинейное преобразование $Y_t = v(X_t)$, например возведение в квадрат $Y_t = X^2_t$; ограничение; линейное преобразование; их комбинации, например $Y_t = \int v(X_\tau)\, h_{t,\tau} d\tau$ — нелинейность v с последующим фильтром. Собственно, вид преобразования не принципиален для расчета $\overline{M}\varphi\{Y_t\}$, который крайне прост: эти средние в точности совпадают со средними $\overline{M}\varphi\{SX_t\}$ от $f\{X_t\} = \varphi\{SX_t\}$ — S-представимых функционалов: $\overline{M}\varphi\{Y_t\} = \overline{M}\varphi\{SX_t\}$. Так, при преобразовании типа «нелинейность — фильтр», введенного чуть выше, имеем:

$$\overline{M}Y_t = \overline{M}\int v(X_\tau)\, h_{t,\tau}\, d\tau, \quad \overline{M}Y_t^2 = \overline{M}\left[\int v(X_\tau)\, h_{t,\tau} d\tau\right]^2;$$

$$\overline{M}\int Y_t\, dt = \overline{M}\int\int v(X_\tau)\, h_{t,\tau}\, dt d\tau,$$

и т. д. По ним ведется расчет соответствующих средних от остальных признаков процесса Y_t как по первичным значениям согласно теореме продолжения.

Подобие моделей. Речь пойдет об отображениях, которые не приводят к потере данных относительно модели. Совершенно ясно, что потерь не должно быть, если S взаимно однозначно отображает $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$, так как обратным отображением S^{-1} всегда можно успеть вернуться назад к исходному пространству и исходной модели, какой бы она ни была. Вопрос становится не таким тривиальным, если S является редукцией пространства, переводящей $\mathscr{X}$ в пространство $\mathscr{Y}$ меньшей размерности.

Отображение S называется *преобразованием подобия* (или просто подобием) для $\mathscr{M}^x$, если $\mathscr{M}^x = S^{-1}S\mathscr{M}^x$, т. е., отображая пространство $\mathscr{X}$ с помощью S в $\mathscr{Y}$, а затем обратно с помощью S^{-1}, приходим к той же самой отнюдь не более широкой модели. При этом S^{-1} будет также преобразованием подобия для $\mathscr{M}^y = S\mathscr{M}^x$, так как $SS^{-1}\mathscr{M}^y = \mathscr{M}^y$.

Модели $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$, связанные между собой подобиями, называются *подобными* и обозначаются $\mathscr{M}^x \sim \mathscr{M}^y$.

Отображение S будет подобием для $\mathscr{M}^x = \langle \overline{M}^x\mathscr{G}\rangle$, если S-представимы все первичные признаки: $g(x) = \psi_g(Sx)$, $\forall g \in \mathscr{G}$. При этом $\mathscr{M}^x$ преобразуется в подобную ей $\mathscr{M}^y = \langle \overline{M}^x\psi\rangle$, определенную первичными средними: $\overline{M}^y\psi_g = \overline{M}^x g$, и $\Psi = \{\psi_g : g \in \mathscr{G}\}$.

Данное утверждение есть повторение рассуждений конца предыдущего раздела.

Наоборот, если S — подобие для $\mathscr{M}^x = \langle \overline{M}^x\mathscr{G}\rangle$, то, оставляя вместо $\mathscr{G}$ поднабор $\mathscr{G}_S$ всех S-представимых первичных признаков $\mathscr{G}_S \subset \mathscr{G}$, мы не изменим исходную модель: $\mathscr{M}^x = \langle \overline{M}^x\mathscr{G}_S\rangle$. Тогда класс $\mathscr{L}^+\mathscr{G}_S$ вторичных признаков будет S-представим и взаимно однозначно с сохранением отношений порядка и значений средних будет отображаться в класс $\mathscr{L}^+\Psi_S$, $\Psi_S = \{\psi_g : g \in \mathscr{G}_S\}$, вторичных признаков подобной $\mathscr{M}^y = S\mathscr{M}^x$, а $\mathscr{L}^+\mathscr{G}_S$ и $\mathscr{L}^+\Psi_S$, в свою очередь, будут подклассами $\mathscr{F}_S$ и соответственно $\Phi_{S^{-1}}$ всех представимых функций, достаточными для расчетов модели $\mathscr{M}^y$ по $\mathscr{M}^x$ при преобразовании S. Отсюда, если $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$ подобны, то классы $\mathscr{F}_S$ и $\Phi_{S^{-1}}$ (как и $\mathscr{L}^+\mathscr{G}_S$, $\mathscr{L}^+\Psi_S$) взаимно однозначно отображаются друг в друга с зеркальностью арифметических действий, сохранением порядка и средних: $f \leftrightarrow \varphi$, $\overline{M}^x f = \overline{M}^y\varphi$, $f \in \mathscr{F}_S$, $\varphi \in \Phi_{S^{-1}}$.

Отношение подобия моделей рефлексивно: $\mathscr{M}^x \sim \mathscr{M}^x$, симметрично: $\mathscr{M}^x \sim \mathscr{M}^y \Rightarrow \mathscr{M}^y \sim \mathscr{M}^x$ и транзитивно: $\mathscr{M}^x \sim \mathscr{M}^y$, $\mathscr{M}^y \sim \mathscr{M}^z \Rightarrow \mathscr{M}^x \sim \mathscr{M}^z$. Подобные модели имеют одинаковые размерности, строго соответствующие друг другу грани и изображаются одинаковыми геометрическими телами (но в разных пространствах).

Пример 2.3. Пусть на разбиении $\mathscr{X}$ на непересекающиеся события: $\mathscr{X} = A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, задано интервальное распределение вероятностей ИРВ границами вероятностей $\underset{\smile}{p}_i = \underset{\smile}{P}(A_i)$, $\tilde{p}_i = \tilde{P}(A_i)$. Эта модель подобна ИРВ на k-точечном пространстве $\mathscr{Y}_k = \{y_1, \ldots, y_k\}$ с теми же вероятностями

$\underset{\sim}{P}(y_i)=\underset{\sim}{p}_i$, $\bar{P}(y_i)=\bar{p}_i$. Отображением, наводящим подобие, будет $A_i \xrightarrow{S} y_i$, а обратным к нему будет изоморфизм $y_i \xrightarrow{S^{-1}} A_i$. Класс $\mathscr{F}_S$ образуют функции вида $c+\sum c_i A_i(x)$, а $\Phi_{S^{-1}}$ — вида $c+\sum c_i \delta_{y_i}(y)$.

Подобие сохраняют алгебраические действия над моделями:

$$\mathscr{M}^x_\theta \sim \mathscr{M}^y_\theta, \quad \forall \theta \Rightarrow \bigwedge_\theta \mathscr{M}^x_\theta \sim \bigwedge_\theta \mathscr{M}^y_\theta, \quad \bigvee_\theta \mathscr{M}^x_\theta \sim \bigvee_\theta \mathscr{M}^y_\theta.$$

2.2. СЛУЧАЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Переходные модели. В предыдущем параграфе рассмотрены отображения $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ и их более общие формы — изоморфизмы, при которых каждая точка x с достоверностью 1 переходит в множество $B_x \subset \mathscr{Y}$, причем B_x при разных x совпадают между собой или не пересекаются.

Рассмотрим общий случай, когда x в принципе может перейти в любую точку $y \in \mathscr{Y}$, а знания об этом среднестатистические. Такие преобразования называются случайными: $\mathscr{X} \xrightarrow{Q} \mathscr{Y}$. Для случайных преобразований Q каждой точке x указывается некоторая ИМ $\mathscr{M}^y{}_x$ на $\mathscr{Y}$, называемая *переходной* из $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$ и определяемая своими средними значениями $\bar{M}^y{}_x\varphi(y)$. Способы ее задания точно такие же, как любой ИМ, а именно, первичными средними $\bar{M}^y{}_x\psi$, $\psi \in \Psi$, где ψ — первичные признаки на $\mathscr{Y}$, средние которых, да и вид их самих, в общем, зависят от x.

В частном случае, когда $\mathscr{M}^y{}_x$ есть интервальное распределение вероятностей, то первичными признаками будут события на $\mathscr{Y}$ и переходная ИМ будет полностью определяться верхними переходными вероятностями

$$\bar{q}(x, B) = \bar{P}^y_x(B), \quad B \subset \mathscr{Y},$$

указывающими, с какой наибольшей вероятностью точка x перейдет в событие B при преобразовании Q. Очевидно, $\underset{-}{q}(x, B) = 1 - \bar{P}^y{}_x(B^c)$, т. е. нижние переходные вероятности сразу вычисляются по верхним.

Преобразования моделей. Пусть теперь заданы $\mathscr{M}^x$ на $\mathscr{X}$ и переходная модель $\mathscr{M}^y{}_x$ на $\mathscr{Y}$, описывающая случайное преобразование Q из $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$. Тогда соответствующая им $\mathscr{M}^y$ на $\mathscr{Y}$ будет определяться средними:

$$\bar{M}^y \varphi(y) = \bar{M}^x \left(\bar{M}^y_x \varphi(y)\right). \tag{2.2}$$

Здесь $\bar{M}^y{}_x\varphi(y)$ есть средние по переходной модели $\mathscr{M}^y{}_x$, а как функции x — это в свою очередь признаки на $\mathscr{X}$, средние которых по $\mathscr{M}^x$, обозначаемые $\bar{M}^x$, и дадут согласованные значения $\bar{M}^y\varphi$, определяющие $\mathscr{M}^y$. Результат преобразования записывается: $\mathscr{M}^y = \mathrm{Q}\mathscr{M}^x$.

Если $\mathscr{F}^x$ и $\mathscr{F}^y{}_x$ есть соответственно области существования средних для $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y{}_x$, то для $\mathscr{M}^y$ эту область составляют такие функции $\varphi(y) \in \mathscr{F}^y{}_x$, что $\bar{M}^y{}_x\varphi(y) \in \mathscr{F}^x$. Сюда, конечно же, входят любые ограниченные функции.

Рассмотрим на примере последовательность вычислений по формуле (2.2).

Пример 2.5. Пусть как $\mathscr{M}^x = \langle \bar{M}^x g \rangle$ задана единственным первичным средним $\bar{M}^x g$, так и переходная модель $\mathscr{M}^y{}_x = \langle \bar{M}^y{}_x \psi \rangle$ — одним средним $\bar{M}^y{}_x\psi(y) = \bar{h}(x)$. Тогда согласно формуле (2.2) для признака $\varphi(y)$ имеем

$$\bar{M}^y \varphi = \bar{M}^x \bar{M}^y_x \varphi = \min_{c + c_1^+ g(x) \geqslant \bar{M}^y_x \varphi} \left[c + c_1^+ \bar{M}^x g\right],$$

где $$\bar{M}^y_x \varphi = \min_{d + d_1^+ \psi(y) \geqslant \varphi(y)} \left[d + d_1^+ \bar{h}(x)\right].$$

Среднее $\bar{M}^y\varphi$ будет определено, если определено $\bar{M}^y{}_x\varphi$ и мажорируемо линейными комбинациями $c + c^+{}_1 g(x)$. Причем для любых φ переходное среднее $\bar{M}^y{}_x\varphi$ как функция переменной x будет пропорционально $\bar{h}(x)$. Тогда и от $\mathscr{M}^x$ требуется только знания $\bar{M}^x\bar{h}(x)$, т. е. $\bar{h}(x)$ — его расширения. Этот факт не распространяется на несколько первичных значений $\bar{M}^y{}_x\psi_j = \bar{h}_j(x)$, так как тогда $\bar{M}^y{}_x\varphi$ не будут, в общем, линейными комбинациями $\bar{h}_j(x)$.

Объясним, почему так. Пусть первичных признаков переходной модели не один, а два, скажем ψ_1 и ψ_2 с соответствующими им верхними средними $\bar{h}_1(x)$ и $\bar{h}_2(x)$, тогда

$$\bar{M}^y_x \varphi = \min_{d + d_1^+ \psi_1(y) + d_2^+ \varphi_2(y) \geqslant \varphi(y)} \left[d + d_1^+ \bar{h}_1(x) + d_2^+ \bar{h}_1(x)\right]$$

и правая часть не будет выражаться в виде линейной комбинации $h_1(x)$ и $\bar{h}_2(x)$, так как значения коэффициентов d и $d^+{}_j$, при которых достигается минимум, могут зависеть от x.

В примере был введен тот случай, когда $\bar{M}^y{}_x\varphi$ при любых φ образуют весьма ограниченный класс $\mathscr{F}^x{}_*$ признаков, причем это всегда замыкание $[\mathscr{L}^+\mathscr{H}]$ полулинейной оболочки $\mathscr{L}^+\mathscr{H}$ некоторого набора $\mathscr{H}$. Тогда для расчета $\mathscr{M}^y = \mathrm{Q}\mathscr{M}^x$ и от $\mathscr{M}^x$ потребуется только знания $\bar{M}^x f$, $f \in \mathscr{F}^x{}_*$, а $\mathscr{F}^x{}_*$-расширение $\mathscr{M}^x$ не приведет к изменению $\mathscr{M}^y : \mathrm{Q}\mathscr{M}^x = \mathrm{Q}\langle \bar{M}^x \mathscr{F}^x{}_* \rangle$.

Остановимся на этом и рассмотрим для начала самый крайний случай. Пусть переходные ИМ одни и те же, независимо от x: $\mathscr{M}^y{}_x = \mathscr{M}_0$. Тогда $\bar{M}^y{}_x\varphi$ будут константами, не зависящими от x, и класс $\mathscr{F}^x{}_*$ вырождается в постоянную c. Получается, что о $\mathscr{M}^x$ вообще ничего не надо знать, чтобы рассчитать $\mathscr{M}^y : \mathscr{M}^y = \mathscr{M}_0$. Это тот случай, когда данные о статистических свойствах на $\mathscr{Y}$ не меняются, если становится известным «вход» x.

Рассмотрим другой случай. Пусть переходная модель $\mathscr{M}^y{}_x$ одна и та же на непересекающихся событиях A_j разбиения $\mathscr{A}_\Sigma = \{A_1, \ldots, A_k\}$ пространства $\mathscr{X}$. Достаточно, чтобы первичные средние, определяющие переходные ИМ, были постоянны на A_j, и тогда $\bar{M}^y{}_x\varphi$ будут постоянными при $x \in A_j$, т. е. $\mathscr{A}_\Sigma$-измеримы, — что и даст класс $\mathscr{F}^x{}_*$. Модель $\mathscr{M}^x$ без ущерба для $\mathscr{M}^y =$

12

$=\mathrm{Q}\mathscr{M}^x$ может быть расширена до ИМ, первичными которой являются средние $\overline{M}\sum c_i A_i(x)$ всех $\mathscr{A}_\Sigma$-измеримых функций (но никак не до ИРВ с первичными событиями из $\mathscr{A}_\Sigma$ или их объединениями).

Детерминированные преобразования есть частный случай случайных, когда переходные модели $\mathscr{M}^y{}_x=\langle P(B_x)=1\rangle$ являются голыми на взаимно непересекающиеся B_x, т. е. достоверно $x\to B_x$. Эти преобразования относятся к предыдущему типу, что будет видно, если для некоторого B_z обозначить $A_z=\{x:x\to B_z\}$, и тогда $A_z\leftrightarrow B_z$.

Свойства преобразований модели. Рассмотрим, какими свойствами обладает операция преобразования своего рода статистического пересчета моделей: $\mathscr{M}^y=\mathrm{Q}\mathscr{M}^x$. Пусть на $\mathscr{X}$ данных нет — голая ИМ $\mathscr{I}^x$. Тогда $\mathscr{M}^y=\mathrm{Q}\mathscr{I}^x$ будет определяться средними:

$$\overline{M}^y\varphi(y)=\sup_x \overline{M}^y_x\varphi(y)$$

и результат записывается:

$$\mathrm{Q}\mathscr{I}^x=\bigvee_{x\in\mathscr{X}}\mathscr{M}^y_x.$$

Значит, преобразование голой ИМ эквивалентно объединению переходных ИМ по входу x, рассматриваемому как параметр.

Зафиксируем этот результат, дав ему расширенную формулировку: *объединение ИМ $\mathscr{M}_\theta$ по параметру $\theta\in\Theta$ может эквивалентно рассматриваться как результат случайного преобразования множества Θ, априорных данных о котором нет, в пространство исходов, а $\mathscr{M}_\theta$ — как переходная модель этого преобразования.*

Отсутствие априорных данных о x даст самую широкую модель на выходе, поэтому в общем случае $\mathrm{Q}\mathscr{M}^x\subset\mathrm{Q}\mathscr{I}^x$.

А что, если переходная $\mathscr{M}^y{}_x$ при всех x является голой, т. е. никаких данных о преобразовании нет? Тогда преобразование любой $\mathscr{M}^x$ ведет едино к голой модели, не несущей никаких статистических данных относительно исходов на $\mathscr{Y}$:

$$\mathscr{M}^y_x=\mathscr{I}^y\Rightarrow\mathrm{Q}\mathscr{M}^x\equiv\mathscr{I}^y,\quad\forall\mathscr{M}^x.$$

Данный факт следует из формулы (2.2): $\overline{M}^y\varphi(y)=\overline{M}^x\sup\varphi(y)=$ $=\sup\varphi(y)$.

Рассмотрим теперь, как транформируются отношения включения и операции объединения, пересечения моделей на $\mathscr{X}$ после случайных преобразований Q.

1. Отношение включения сохраняется при преобразованиях:

$$\mathscr{M}_1^x\subset\mathscr{M}_2^x\Rightarrow\mathrm{Q}\,\mathscr{M}_1^x\subset Q\,\mathscr{M}_2^x.$$

2. Преобразование объединения моделей на $\mathscr{X}$ равно объединению их преобразовний:

$$\mathrm{Q}\big(\bigvee_v\mathscr{M}_v^x\big)=\bigvee_v\mathrm{Q}\mathscr{M}_v^x.$$

В частности, если $\mathscr{M}^x=\bigvee_v\mathscr{P}_v$ представляется как объединение вершин, то преобразование $\mathscr{M}^x$ — как объединение преобразованных вершин:

$$\mathrm{Q}\mathscr{M}^x=\bigvee_v\mathrm{Q}\mathscr{P}_v.$$

3. Преобразование пересечения моделей включается в пересечение их преобразований:

$$\mathrm{Q}\big(\bigwedge_v\mathscr{M}_v^x\big)\subset\bigwedge_v\mathrm{Q}\mathscr{M}_v^x.$$

Причина тому, что в последней части стоит включение, а не равенство, состоит в ослаблении порядка между признаками при случайных преобразованиях. В частности (когда v — индекс, обозначающий номер первичного признака), получаем

$$\mathrm{Q}\,\langle\overline{M}^x_{\mathscr{G}}\rangle=\mathrm{Q}\bigwedge_{g\in\mathscr{G}}\langle\overline{M}^x g\rangle\subset\bigwedge_{g\in\mathscr{G}}\mathrm{Q}\,\langle\overline{M}^x g\rangle.$$

4. Справедливо включение

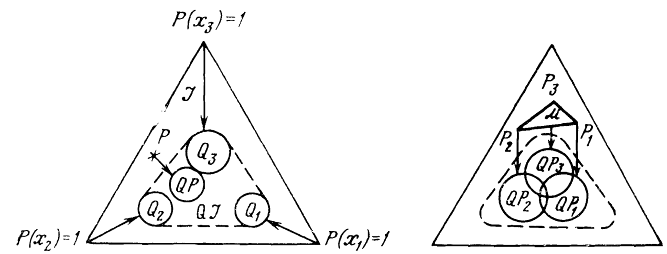
$$\big(\bigvee_\theta\mathrm{Q}_\theta\big)\,\mathscr{M}^x\supset\bigvee_\theta\mathrm{Q}_\theta\,\mathscr{M}^x,$$

где $\mathrm{Q}=\bigvee_\theta\mathrm{Q}_\theta$ — преобразование, соответствующее объединению переходных ИМ: $\mathscr{M}^y{}_x=\bigvee_\theta\mathscr{M}^y{}_{x,\,\theta}$.

В самом деле, $\overline{M}^y\varphi=\overline{M}^x\sup_\theta\overline{M}^y{}_{x,\,\theta}\varphi\geqslant\sup_\theta\overline{M}^x\overline{M}^y{}_{x,\,\theta}\varphi=\sup_\theta\overline{M}^y{}_\theta\varphi$.

Дадим на примере геометрическую иллюстрацию сказанного.

Пример 2.6. Пусть троеточие $\mathscr{X}=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ случайным преобразованием Q отображается на себя. Переходная модель $\mathscr{M}^y{}_x$ при каждом значении x_i представляется как выпуклое множество Q_i векторов вероятностей $\mathbf{q}^{\mathrm{T}}=$ $=(q(x_i,\ y_1),\ q(x_i,\ y_2),\ q(x_i,\ y_3))$, так что $\overline{\mathscr{M}}^y{}_{x_i}\varphi=\max_{\mathbf{q}\in Q_i}\mathbf{q}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varphi}$, где функция $\boldsymbol{\varphi}$ есть вектор. Множества Q_i, как представлено на рис. 2.2,*а*, — это результат преобразований индикаторных моделей $\langle P(x_i)=1\rangle$, $i=1,\ 2,\ 3$, являющихся



а) *б)*

Рис. 2.2. Образы моделей при случайных преобразованиях вершинами $\mathcal{J}$. Преобразование вероятностей $\mathbf{P}=(P(x_1),\ P(x_2),\ P(x_3))$ ведет к семейству векторов:

$$\mathrm{Q}\mathbf{P}=\left\{\mathbf{P}^y : P^y(y_j)=\sum_{i=1}^{3} P(x_i)\,q(x_i,\ y_j),\quad \mathrm{q}\in Q_i\right\}.$$

Как это видно из рис. 2.2,*б*, $\mathrm{Q}\mathcal{M}^x$ составляется из преобразованных векторов вероятностей, лежащих в вершинах $\mathcal{M}^x$, и «загнанных» внутрь преобразования $\mathrm{Q}\mathcal{J}^x$ голой ИМ. Суть третьего свойства раскрывается включением: $(\mathrm{Q}\mathbf{P}_2\vee\vee\mathrm{Q}\mathbf{P}_3)\wedge(\mathrm{Q}\mathbf{P}_3\vee\mathrm{Q}\mathbf{P}_1)\supset\mathrm{Q}\mathbf{P}_3$.

Индикаторные преобразования, интервальная арифметика. Рассмотрим особый класс $\mathcal{M}^x$ и $\mathcal{M}^y{}_x$. Пусть $\mathcal{M}^x$ задана единственным предложением: «событие A из $\mathcal{X}$ достоверно». Это даст индикаторную модель: $\mathcal{M}^x=\langle P_x(A)=1\rangle$, определяемую согласованными средними $\overline{M}^x f(x)=\sup\limits_{x\in A} f(x)=\overline{f}(A)$, $\forall f\in\mathcal{F}_0$. Пусть случайный оператор осуществляет достоверно перевод каждой точки x в событие B_x на $\mathcal{Y}$, что описывается *индикаторными переходными моделями* $\mathcal{M}^y{}_x=\langle P^y(B_x)=1\rangle$, определяемыми средними: $\overline{M}^y{}_x\varphi(y)=\overline{\varphi}(B_x)$, $\forall\varphi\in\mathcal{F}_0$ (здесь не требуется, как для детерминированных изоморфных отображений, чтобы B_x взаимно не пересекались). Тогда согласно (2.2)

$$\overline{M}^y\,\varphi(y)=\sup_{x\in A}\,(\sup_{y\in B_x}\varphi(y))=\overline{\varphi}(\bigcup_{x\in A}B_x),$$

т. е. результирующая $\mathcal{M}^y$ будет также B-индикаторной с событием $B=\bigcup\limits_{x\in A}B_x : \mathcal{M}^y=\langle P^y(B)=1\rangle$.

Таким образом, при индикаторных преобразованиях индикаторные модели переходят сами в себя, оставаясь в рамках этого очень простого класса. А по сути дела, производятся прямые преобразования одних событий в другие. В частных случаях, когда $\mathcal{X}=\mathcal{Y}=\mathcal{R}$ — числовая ось, A и B_x — интервалы на ней, а переходные операторы отражают простейшие арифметические действия, получаем правила преобразования интервалов — интервальную арифметику.

Сложение. Пусть $\mathcal{M}^x$ индикаторная на отрезке $A=[a,\ b]$ модель, а переходной оператор прибавляет к числу x отрезок $[c,\ d]$, т. е. $\mathcal{M}^y{}_x$ — индикаторные модели на отрезках $B_x=x+[c,\ d]=[x+c,\ x+d]$. Тогда индикаторным для $\mathcal{M}^y$ будет отрезок $B=[a,\ b]+[c,\ d]=[a+c,\ b+d]$, что и дает нам правило интервального сложения.

Вычитание. Аналогично предыдущему $[a,\ b]-[c,\ d]=[a-d,\ b-c]$. При сложении и вычитании ширина результирующего отрезка равна сумме составляющих.

Умножение. Модель $\mathcal{M}^x$ та же, а переходный оператор умножает каждое число x на отрезок, что ведет к отрезкам, равным $B_x=x[c,\ d]=[xc,\ xd]$ при $x\geqslant 0$ и $B_x=[xd,\ xc]$ при $x<0$. Объединяя B_x по $x\in[a,\ b]$, получаем результат умножения отрезков в виде одного отрезка $B=[a,\ b]\times[c,\ d]=[\min\{ac,\ ad,\ bc,\ bd\},\ \max\{ac,\ ad,\ bc,\ bd\}]$, задающего индикаторную модель $\mathcal{M}^y$.

Деление. Модель $\mathcal{M}^x$ та же, а оператор осуществляет деление: при $x\geqslant 0$ имеем

$$B_x=x/[c,\ d]=\begin{cases}\left[\dfrac{x}{d},\ \dfrac{x}{c}\right] & \text{при } c\leqslant d<0,\\[2mm] \left(-\infty,\ \dfrac{x}{c}\right]\cup\left[\dfrac{x}{d},\ \infty\right) & \text{при } c\leqslant 0\leqslant d,\\[2mm] \left[\dfrac{x}{d},\ \dfrac{x}{c}\right] & \text{при } 0<c\leqslant d,\end{cases}$$

а при $x<0$ в правой части равенств переставляются d с c.

Объединение по $x\in[a,\ b]$ дает результат интервального деления:

$$[a,\ b]/[c,\ d]=\begin{cases}[a,\ b]\times[1/d,\ 1/c], & 0\notin[c,\ d],\\ (-\infty,\max\{a/c,b/d\}]\cup[\min\{a/d,b/c\},\ \infty), & c\leqslant 0\leqslant d.\end{cases}$$

В первом случае $0\notin[c,\ d]$ результат выражается через интервальное умножение, а во втором получается в виде объединения отрезков, и тогда при делении результат уже не будет одним отрезком, а дробится на два полуотрезка.

Как при сложении, так и при вычитании отрезок расширяется. Это ясно, так как размытые преобразования могут внести только дополнительную неопределенность, поэтому операции интервального сложения и вычитания не являются взаимно обратимыми, например $[a,\ b]+[c,\ d]-[c,\ d]=[a+c-d,\ b+d-c]$ (кроме $c=d$), равно, как операций умножения и деления.

Повторные действия приводят к дальнейшему расширению результирующих отрезков, причем при дроблении отрезка, вызванного операцией деления, последующие действия нужно совершать с каждой частью в отдельности, объединяя их потом между собой.

Простые преобразования. При рассмотрении в предыдущем параграфе детерминированных отображений S основой нахождения $\mathcal{M}^y=\mathrm{S}\mathcal{M}^x$ служила взаимно-однозначная связь между классами S и S^{-1} представимых признаков: $\mathcal{F}_{\mathrm{S}}\leftrightarrow\Phi_{\mathrm{S}^{-1}}$, один класс на $\mathcal{X}$, другой —на $\mathcal{Y}$, и средние переносились с $\mathcal{F}_{\mathrm{S}}$ на $\Phi_{\mathrm{S}^{-1}}$, определяя $\mathcal{M}^y$. Покажем, что аналогичная связь существует и для некоторого типа случайных преобразований (обобщающих изоморфизмы). Определим их.

Пусть Φ — набор признаков на $\mathcal{Y}$. Назовем Φ-*простым* такое случайное преобразование из $\mathcal{X}$ на $\mathcal{Y}$, переходная модель $\mathcal{M}^y{}_x$ которого задается точными на Φ средними: $\underline{M}^y{}_x\varphi=\overline{M}^y{}_x\varphi=M^y{}_x\varphi$, $\forall\varphi\in\Phi$; они же первичные, так что $\mathcal{M}^y{}_x=\overline{\langle M^y{}_x\Phi\rangle}$.

Ввиду того, что точные средние распространяются на линейную оболочку, оставаясь на ней точными, Φ-простые и $\mathcal{L}\Phi$-простые преобразования суть одно и то же, поэтому сразу удобно считать Φ линейным подклассом признаков на $\mathcal{Y}$.

При Φ-простых преобразованиях признаку $\varphi\in\Phi$ на $\mathcal{Y}$ ставится в соответствие признак f_φ на $\mathcal{X}$ вида

$$f_\varphi(x) = M^y_x\, \varphi(y),$$

называемый *изображением* φ, так что $\varphi\to f_\varphi$. Средние у признаков $\varphi\in\Phi$ и их изображений f_φ одни и те же:

$$\bar{M}^y \varphi(y) = \bar{M}^x M^y_x\, \varphi(y) = \bar{M}^x f_\varphi(x). \qquad (2.3)$$

Обозначим линейный класс

$$\mathcal{F}_\Phi = \{f_\varphi(x),\quad \varphi\in\Phi\}$$

и назовем его *изображением* Φ. Таким образом, Φ-простое преобразование Q порождает отображение $\Phi\to\mathcal{F}_\Phi$ признаков на $\mathcal{Y}$ в их изображения на $\mathcal{X}$. Наоборот, каждому признаку $f\in\mathcal{F}_\Phi$ будет соответствовать подмножество Φ_f признаков $\varphi\in\Phi$, таких, что их изображение есть f:

$$f \to \Phi_f = \{\varphi : \varphi\in\Phi,\quad M^y_x\, \varphi(y) = f(x)\}.$$

Множество Φ_f называется *нечетким образом признака* f относительно Q. Каждому признаку f из $\mathcal{F}_\Phi$ соответствует свой образ, и объединение всех образов дает Φ. Сказанное иллюстрируется рис. 2.3.

Если $\varphi_1\geqslant\varphi_2$, то $f_{\varphi_1}=M^y{}_x\varphi_1\geqslant M^y{}_x\varphi_2=f_{\varphi_2}$. Следовательно, соотношение упорядоченности между признаками $\varphi\in\Phi$ влекут за собой такие же отношения между изображениями. Для образов это не всегда верно: может быть $f_1\geqslant f_2$, f_1, $f_2\in\mathcal{F}_\Phi$, но отнюдь не $\varphi_1\geqslant\varphi_2$ для $\varphi_1\in\Phi_{f_1}$, $\varphi_2\in\Phi_{f_2}$. Вывод тот, что отношения больше-меньше внутри Φ беднее, чем внутри $\mathcal{F}_\Phi$, и следовательно, *случайные преобразования, даже простые, нарушают порядок между признаками.*

Рассмотрим, каким получается $\mathcal{M}^y=\mathrm{Q}\mathcal{M}^x$ при простых преобразованиях. Во-первых, если $\mathcal{M}^x$ является $\mathcal{G}$-точной моделью ($M^x g=\bar{M}^x g$, $g\in\mathcal{G}$) и $\mathcal{G}\in\mathcal{F}_\Phi$, то $\mathcal{M}^y$ будет $\Phi_{\mathcal{G}}=\bigcup_{f\in\mathcal{G}}\Phi_f$-точной.

Пусть теперь $\mathcal{M}^x=\langle\bar{M}^x\mathcal{G}\rangle$ не является точной и задана на первичном наборе $\mathcal{G}$ признаков, и пусть $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}_\Phi$. Так как $\mathcal{F}_\Phi$ есть линейный класс, то $\mathcal{L}\mathcal{G}\subset\mathcal{F}_\Phi$. Какой здесь будет $\mathcal{M}^y=\mathrm{Q}\mathcal{M}^x$? Согласно формуле (2.3) $\bar{M}^y\varphi$ на признаках из Φ получаются перенесением средних с изображений этих признаков, т. е. с признаков из класса $\mathcal{F}_\Phi$. Дальнейшее продолжение на произвольные признаки на $\mathcal{Y}$ будет следовать из формулы (2.2)

$$\bar{M}^y h(y) = \bar{M}^x\,[\inf_{h\leqslant\varphi\in\Phi} M^y_x\varphi] = \bar{M}^x\,[\inf_{h\leqslant\varphi\in\Phi} f_\varphi(x)],$$

где инфимум берется по $\varphi\in\Phi$. Видно, что в общем случае

$$\bar{M}^y h(y) \leqslant \inf_{h\leqslant\varphi\in\Phi}\bar{M}^x f_\varphi = \inf_{h\leqslant\varphi\in\Phi}\bar{M}^y\varphi.$$

При строгом неравенстве класс Φ не будет первичным для $\mathcal{M}^y$, а именно, верно включение $\mathcal{M}^y\subset\langle\bar{M}^y\Phi\rangle$, где $\langle\bar{M}^y\Phi\rangle$ есть Φ-рас-

ширение $\mathcal{M}^y$. Тождественное же равенство будет иметь место тогда, когда инфимум проносится за символ M^x. Это как раз тот случай, когда $\bar{M}^y{}_x h\in\mathcal{F}_\Phi$ при всех h, для которых левая часть определена. Отсюда следует:

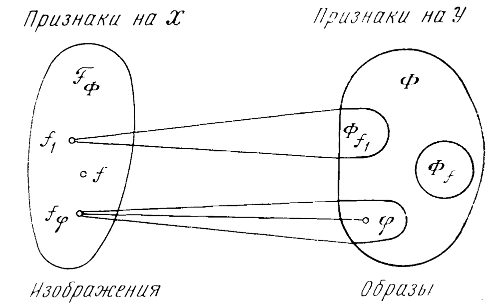


Рис. 2.3. Образы и изображения

Если случайное преобразование Q; *а) задано точными на классе* Φ *переходными моделями* $\mathcal{M}^y{}_x=\langle M^y{}_x\Phi\rangle$, *б) если* $\bar{M}^y{}_x h$, $\forall h\in\mathcal{F}^y$, *оказываются изображениями* $\varphi\in\Phi$, *то* $\mathcal{M}^y=\mathrm{Q}\mathcal{M}^x$ *будет полностью определяться средними* (2.3) *на классе* Φ *признаков.*

Рассмотрим пример, когда условия этого утверждения выполняются.

Пример 2.7. Преобразование задано переходной плотностью.

Пусть $\mathcal{X}=\mathcal{R}^n$, $\mathcal{Y}=\mathcal{R}^m$ — векторные пространства, и пусть преобразование $\mathcal{R}^n\xrightarrow{\mathrm{Q}}\mathcal{R}^m$ задается точной переходной плотностью вероятностей $p_x(y)$ на $\mathcal{R}^m$ при каждом заданном векторе $x\in\mathcal{R}^n$. Если это плотность по мере-длине, то класс Φ — это всевозможные интегрируемые функции $\varphi(y)$ и их изображениями будут

$$f_\varphi(x) = \int_{y\in\mathcal{R}^m}\varphi(y)\,P_x(y)\,dy,\quad \varphi\in\Phi.$$

Каким же будет класс $\mathcal{F}_\Phi$ изображений? Чтобы ответить на этот вопрос, в плотности $p_x(y)$ «окрестим» y как параметр со значениями из $\mathcal{Y}$ и взглянем на переходную плотность как на набор функций переменной x, индексированный параметром y, для чего переобозначим ее: $q(x, y)=p_x(y)$. Если интеграл интерпретировать как линейную комбинацию функции $q(x, y)$ с весами $\varphi(y)$, то будет видно, что класс $\mathcal{F}_\Phi$ есть замыкание линейной оболочки $\sum c_i q(x, y_i)$. Этот класс линеен. Его размерность определяется числом линейно-независимых функций $q(x, y_i)$, т. е. размерностью их базиса. Он может быть невелик, если $q(x, y)$ при всевозможных $y\in\mathcal{Y}$ принимает как функция x лишь некоторые конкретные очертания.

При расчете $\mathcal{M}^y$ можно отбросить все знания о $\mathcal{M}^x$, оставив лишь $\bar{M}^x f_\varphi(x)$, $f_\varphi\in\mathcal{F}_\Phi$, так как только они дадут средние $\bar{M}^y\varphi(y)$ для любых интегрируемых φ.

Дополнения. 1. Связь между преобразованиями. Класс индикаторных преобразований шире класса изоморфных отображений § 2.1, в которых тоже $x\to B_x$, но B_x должны либо совпадать, либо не пересекаться между собой.

Индикаторные преобразования $x\to B_x$, хотя $\mathcal{M}^x$ для них определяются точными первичными средними $M^y{}_x B_x=1$, не входят в класс простых преобразований. Действительно, последние задаются точными значениями $M^{y}{}_{x}\varphi(y)$, $\varphi\in\Phi$, в которых первичные признаки $\varphi(y)$ переходных моделей не зависят от x (зависят лишь сами первичные значения), а B_x соответствует индикаторному признаку $B_x(y)$, зависящему от x.

Изоморфизмы § 2.1 есть частный случай простых преобразований, когда первичными переходной модели являются индикаторы $\varphi(y)=B_j(y)$, где B_j есть элементы разбиения $\mathscr{Y}$, а их вероятности $M^{y}{}_{x}\varphi(y)=P^{y}{}_{x}(B_j)$ равны 1, если $x\to B_j$, иначе — 0.

2. Случайное подобие. Дадим обобщение понятия подобия, показав, что подобными могут быть модели, связанные простыми случайными преобразованиями, наделенными свойствами подобных отображений § 2.1.

Модели $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$ называются *подобными* между собой, что пишется $\mathscr{M}^x\sim\mathscr{M}^y$, если, во-первых, $\mathscr{M}^y=\mathrm{Q}\mathscr{M}^x$ для некоторого преобразования Q (в общем, случайного) из $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$, и во-вторых, для Q существует «возвратное» (не всегда обратное) преобразование Q^- из $\mathscr{Y}$ на $\mathscr{X}$ (также, в общем, случайное) такое, что $\mathscr{M}^x=\mathrm{Q}^-\mathscr{M}^y$, т. е. возвращающее к исходной модели на $\mathscr{X}$. Можно доказать, что случайное преобразование Q *будет преобразованием подобия, если выполняются три условия: а) Q задано точными на классе Φ переходными моделями $\mathscr{M}^{y}{}_{x}=\langle M^{y}{}_{x}\Phi\rangle$; б) признаки из Φ взаимно-однозначно с сохранением порядка связываются $\varphi\leftrightarrow f_\varphi$ с их изображениями $f_\varphi=M^{y}{}_{x}\varphi$, $f_\varphi\in\mathscr{F}_\Phi$ (наводя изоморфизм Φ и $\mathscr{F}_\Phi$); в) класс $\mathscr{F}_\Phi$ является определяющим для $\mathscr{M}^x$ (а Φ — определяющим для $\mathscr{M}^y$).*

Рассмотрим пример, когда условия утверждения выполняются.

Пусть каждый первичный признак g модели $\mathscr{M}^x$ допускает разложение $g(x)=\sum_1^{k+1} g_i q_i(x)$ по базису $q_1, \ldots, q_{k+1}$, такому, что: а) $q_i(x)\geqslant 0$; б) $\sum_1^{k+1} q_i(x)=1$; в) $g(x)\geqslant 0 \Leftrightarrow g_i\geqslant 0$, $i=1, \ldots, k+1$. Тогда преобразование Q из $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}=\{y_1, \ldots, y_{k+1}\}$, задаваемые вероятностями перехода $P_x(y_i)=q_i(x)$, является подобием для $\mathscr{M}^x$ и ведет к подобной ей $\mathscr{M}^y$, определенной средними

$$\overline{M}^y\varphi(y)=\overline{M}^y\sum_1^{k+1}\varphi_i\,\delta_{y_i}(y)=\overline{M}^x\sum_1^{k+1}\varphi_i\,q_i(x),\quad \varphi_i=\varphi(y_i),\ \forall\varphi_i.$$

Сказанное иллюстрируется рис. 2.4.

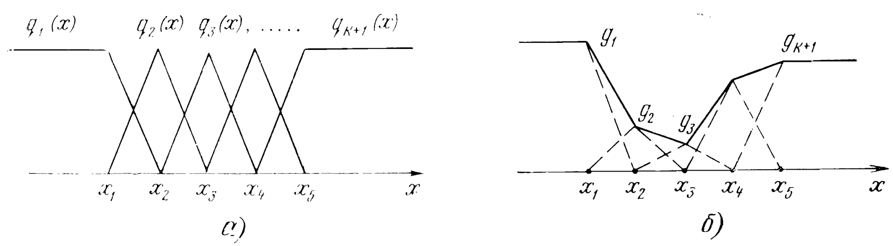


Рис. 2.4. Случайное подобие: *а*) базис; *б*) вид первичных признаков $\mathscr{M}^x$

2.3. НЕЧЕТКИЕ СОБЫТИЯ И РАЗМЫТЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Наблюдения и их изображения. Наблюдения есть результаты явления, фиксируемого через канал, измерительные устройства, органы чувств и пр. Удобно представлять себе два пространства: $\mathscr{X}$ — исходов явления, называемое *предметным* (иногда, универсальным [18]) пространством, и $\mathscr{Y}$ — пространство для описания результатов *наблюдений* (в виде чисел, суждений, словесных высказываний и т. д.) как событий B на $\mathscr{Y}$. Пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ связываются между собой случайным оператором, описываемым переходной моделью $\mathscr{M}^{y}{}_{x}$. Через призму этого оператора, по сути, мы и следим со стороны $\mathscr{Y}$ за тем, что происходит на $\mathscr{X}$. Каждое наблюдение $B\subset\mathscr{Y}$ будет иметь в предметном пространстве $\mathscr{X}$ свое интервальное изображение:

$$[\underline{q}(x, B), \overline{q}(x, B)]=[\underline{P}^y_x(B), \overline{P}^y_x(B)],\quad B\subset\mathscr{Y} -$$

это есть границы вероятности появления события B при исходе $x\in\mathscr{X}$, вычисленные относительно переходной модели $\mathscr{M}^{y}{}_{x}$. Размытость кривой изображения как функции переменной x характеризует нечеткость наблюдения B.

Изображения разных событий $B_i\subset\mathscr{Y}$ есть составная часть средних переходной модели и потому обязаны согласовываться между собой. Отсюда логическим связям на $\mathscr{Y}$ между событиями ставятся в соответствие отношения на $\mathscr{X}$ между изображениями:

$$1.\ B_1\subset B_2\Leftrightarrow\begin{cases}\underline{q}(x, B_1)\leqslant\underline{q}(x, B_2),\\ \overline{q}(x, B_1)\leqslant\overline{q}(x, B_2);\end{cases}$$

$$2.\ B_1 B_2=\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}\underline{q}(x, B_1+B_2)\geqslant\underline{q}(x, B_1)+\underline{q}(x, B_2),\\ \overline{q}(x, B_1+B_2)\leqslant\overline{q}(x, B_1)+\overline{q}(x, B_2);\end{cases}$$

$$3.\ B_1=B_2^{\mathrm{c}}\Leftrightarrow\begin{cases}\underline{q}(x, B_1)=1-\overline{q}(x, B_2),\\ \overline{q}(x, B_1)=1-\underline{q}(x, B_2);\end{cases}$$

4. Все $\mathscr{Y}$ и пустое $\varnothing$ есть наблюдения с тривиальными (тождественная единица и ноль) изображениями:

$$q(x, \mathscr{Y})\equiv 1,\quad q(x, \varnothing)\equiv 0.$$

Для определения изображений $\underline{P}_x(B)$, $\overline{P}_x(B)$ всех $B\subset\mathscr{Y}$ достаточно задать переходные вероятности на первичных событиях $B_i\in\mathscr{B}$ в виде $\underset{\smile}{P}_x(B_i)$, $\tilde{P}_x(B_i)$, $B_i\in\mathscr{B}$, и затем перенести на любые события по известной формуле продолжения и согласования:

$$\overline{P}_x(B)=\inf_{c+\sum c_i B_i(y)\geqslant B(y)}[c+\sum(c_i^+\breve{P}_x(B_i)-(-c_i)^+\underset{\smile}{P}_x(B_i))],$$

$$\underline{P}_x(B)=1-\overline{P}_x(B^{\mathrm{c}}),$$

где $c^+_i = c_i$ при $c_i \geqslant 0$ и $c^+_i = 0$ при $c_i < 0$. Это и приведет к согласованным изображениям любых $B \subset \mathscr{Y}$.

Наблюдения как события на $\mathscr{Y}$ разделяются на *первичные* B_i, для которых исходно известны изображения $\underline{q}(x,\ B_i) = \underline{P}_x(B_i)$, $\bar{q}(x,\ B_i) = \bar{P}_x(B_i)$ и все остальные, $B \subset \mathscr{Y}$, которые логически следуют (логика отношений суждений и используется, по существу, в неравенстве под знаком инфимума при нахождении $\bar{P}_x(B)$).

Из наблюдений B с помощью «предположительных высказываний» формируются *нечеткие суждения*, согласно которым с вероятностями γ_i, $i = 1,\ 2,\ \ldots$, производится случайный выбор одного из нескольких $B_i \subset \mathscr{Y}$. Иначе говоря, по смыслу неясно, какое из наблюдений B_i имело место и γ_i есть степень уверенности (вероятность) того, что произошло именно B_i. Изображением такого суждения на предметном пространстве будет $[\sum \gamma_i \underline{q}(x,\ B_i),\ \sum \gamma_i \bar{q}(x,\ B_i)]$. Так, если B является правильным с вероятностью p и ложным (противоположным B, т. е. B^c) с вероятностью $1-p$, то изображением на $\mathscr{X}$ будет

$$[p\underline{q}(x,\ B) + (1-p)(1-\bar{q}(x,\ B)),\ p\bar{q}(x,\ B) + (1-p)(1-\underline{q}(x,\ B))].$$

Каждое суждение, четкое в виде события B или нечеткое, объективно определяется своим изображением. Два суждения, имеющие одинаковые изображения, будут тождественными, так как они описывают одну и ту же ситуацию, только по-разному. Вообще любая пара границ $[\underline{q}(x),\ \bar{q}(x)]$, $0 \leqslant \underline{q}(x) \leqslant \bar{q}(x) \leqslant 1$, на предметном пространстве $\mathscr{X}$ есть *нечеткое событие*. Разумеется, это не обязательно изображения каких-нибудь наблюдений. Изображения как первичных наблюдений, да и всех остальных наблюдений, так и суждений составляют лишь частный класс нечетких событий. Таким образом, нечетких событий обычно существует значительно больше, чем наблюдений. Логика нечетких событий и действия между ними определяются через отношения и действия между границами по аналогии с отношениями 1—4 между изображениями.

Размытые вероятности и средние. Само по себе утверждение, что среднее Mf принимает такое-то конкретное значение, есть форма представления нашего знания о среднем, так сказать, наблюдения за ним. При точном среднем имеем четкое наблюдение за ним. Интервальное среднее $[\underline{M}f,\ \bar{M}f]$ есть одна из форм нечеткого наблюдения за средним или же размытых знаний. Правильнее — это изображение наших знаний, имеющихся данных о среднем на предметном пространстве его значений — числовой оси. При интервальном среднем изображение индикаторное, как это демонстрируется на рис. 2.5. Но ведь существуют и нами изучены другие, более общие формы изображений, в виде неких очертаний, они и будут здесь применены к средним, в этом наша цель.

Прежде нужно сделать одну оговорку. По своей внутренней сути средние, как и вероятности, выпуклы в том смысле, что

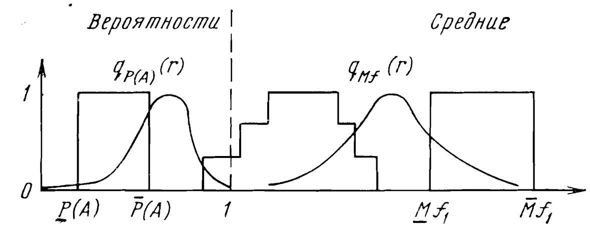


Рис. 2.5. Размытые вероятности и средние

области их значений — выпуклые множества. Нельзя иметь интервальное среднее в виде объединения двух непересекающихся отрезков $[\underline{M}f,\ \bar{M}f]$, $[\underline{\underline{M}}f,\ \bar{\bar{M}}f]$, $\bar{M}f < \underline{\underline{M}}f$, он обязательно сольется в один: $[\underline{M}f,\ \bar{\bar{M}}f]$. Это накладывает вполне конкретный отпечаток на общий вид кривых изображений средних, вводимых следующим определением.

Функция $q_{Mf}(r)$ на числовой прямой $r \in \mathscr{R}$ называется изображением среднего Mf, или *размытым средним признака* f, если она:

1) неотрицательна и не больше $1: 0 \leqslant q_{Mf}(r) \leqslant 1$;
2) равна 0 вне диапазона $[\inf f,\ \sup f]$ возможных значений Mf;
3) унимодальна (не имеет локальных максимумов);
4) полунепрерывна снизу;
5) хотя бы при одном r принимает значение 1.

Виды размытых средних изображены на рис. 2.5. При $f = A$ это будут размытые вероятности.

Нам понадобится понятие горизонтального *среза* от размытого среднего на высоте γ, $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$; это интервал, внутри которого изображение среднего больше или равно γ:

$$[\underline{M}_{(\gamma)} f,\ \bar{M}_{(\gamma)} f] = \{r : q_{Mf}(r) \geqslant \gamma\}.$$

Указанные условия, ограничивающие вид размытых средних, по существу, требуют, чтобы срезом при любом $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$ был интервал и только он. Этот интервал и создает тот фундамент, который связывает размытые средние с интервальными и далее с интервальными моделями. Величина γ есть степень доверия, или своего рода предпочтения, отводимого данному интервалу.

Любое размытое среднее эквивалентно определяется зависимостью от γ, пробегающей значения от 0 до 1, соответствующих срезам интервалов $[\underline{M}_{(\gamma)}f,\ \bar{M}_{(\gamma)}f]$, сужающихся при увеличении γ. Допускаются бесконечные значения границ этих интервалов.

Перейдем к понятию размытой модели средних. Представим на миг, что размытые средние $q_{Mf}(r)$ приданы всем признакам $\forall f$, ограниченным и неограниченным. Срезы $[\underline{M}_{(\gamma)}f,\ \bar{M}_{(\gamma)}f]$ на одной высоте γ есть интервальные средние. Если они согласованы $\forall f$, то определяют интервальную модель $\mathscr{M}_{(\gamma)}$ с областью существования $\mathscr{F}_{(\gamma)} = \{f : \bar{M}_{(\gamma)}f < \infty\}$. При γ, пробегающем значения от 0 до 1, образуется сужающаяся последовательность моделей: $\mathscr{M}_{(\gamma)}\subset\mathscr{M}_{(\gamma')}$, $\gamma\geqslant\gamma'$, которые, как бы лежащие друг на друге на разных уровнях γ, создают своего рода пирамиду, т. е. размытую модель.

Размытой моделью называется сужающаяся при увеличении γ от 0 до 1 последовательность $\mathscr{M}_{(\gamma)}$ не вырождающихся в пустую (при $\gamma=1$) интервальных моделей. Определяется она совокупностью $q_{Mf}(r)$, $\forall f$, размытых средних, согласованных между собой в каждом срезе.

Исходя из указанной интерпретации размытой модели вытекает и основной способ ее задания: сначала задаются размытые средние $\tilde{q}_{Mg}(r)$ на наборе $g\subset\mathscr{G}$ первичных признаков. Берутся γ-срезы $\underset{\smile}{M}_{(\gamma)}g$, $\tilde{M}_{(\gamma)}g$, которые как первичные средние дадут при увеличении γ сужающиеся модели $\mathscr{M}_{(\gamma)}=\langle\underset{\smile}{M}_{(\gamma)}\mathscr{G},\ \tilde{M}_{(\gamma)}\mathscr{G}\rangle$. При $\gamma=1$ первичные средние должны быть непротиворечивыми, чтобы самый верхний срез был не пустым: $\mathscr{M}_{(1)}\neq\varnothing$ (тогда тем более они будут непротиворечивыми при всех $0\leqslant\gamma\leqslant1$). По $\mathscr{M}_{(\gamma)}$ находятся интервалы $\underline{M}_{(\gamma)}f$, $\bar{M}_{(\gamma)}f$ для $\forall f$, они и дадут γ-срезы, определяющие размытые средние $q_{Mf}(r)$, $\forall f$. Нетрудно убедиться в том, что для них выполняются все требуемые условия 1)—5), входящие в определение размытых средних. Как частный случай, получаются размытые вероятности $q_{P(B)}(r)$, $\forall B$, особенность которых в том, что они располагаются, как это видно из рис. 2.5, на интервале 0—1 значений r.

В процессе продолжения средних на все признаки параллельно происходит согласование первичных значений $\tilde{q}_{Mg}(r)$; получающиеся в результате новые кривые $q_{Mg}(r)$, в общем, делаются более узкими: $q_{Mg}(r)\leqslant\tilde{q}_{Mg}(r)$, и следовательно, более точными.

В качестве небольшого отступления разграничим уровни описаний. Первый уровень занимает градация событий на элементарные $x\in\mathscr{X}$, сложные $A\subset\mathscr{X}$, далее, определяемые точными изображениями $q(x,\ B)$, наконец, интервальными $[\underline{q}(x,\ B),\ \bar{q}(x,\ B)]$. Следующий уровень составляют статистические описания: это точное среднее Mf, интервальное $[\underline{M}f,\ \bar{M}f]$, размытое $q_{Mf}(r)$.

Наконец, можно было бы говорить еще о более высшем уровне, а именно, расплывчатости самих описаний, вводя вместо $q_{Mf}(r)$ интервал $\underline{q}_{Mf}(r)$, $\bar{q}_{Mf}(r)$ и далее, обобщая его до некоторой кривой принадлежности. Вопрос только в том, оправдано ли будет такое усложнение. Для ответа рассмотрим крайний случай, когда имеет место полное незнание среднего, что эквивалентно интервалам голой модели $[\underline{M}f,\ \bar{M}f]=[\inf f,\ \sup f]$, и оно же эквивалентно тривиальным изображениям вида $\underline{q}_{Mf}(r)\equiv0$, $\bar{q}_{Mf}(r)\equiv1$. А так как последнее, несомненно, менее удобная форма, переход к метаописаниям (описаниям описаний) и еще дальше вряд ли имеет какой-либо содержательный смысл.

Размытые действия. Интервальная арифметика § 2.2 пригодна для расчета ошибок при вычислениях, вызванных округлением чисел. Но в некоторых задачах возникает необходимость и даже имеется возможность указывать положения неизвестных чисел не в виде интервалов, т. е. категорически: да — значит, принадлежит интервалу, нет — не принадлежит, а более плавно в виде кривых предпочтений, отводимых тем или иным числовым значениям (называемым также кривыми принадлежности [15]). И с ними нужно производить действия арифметики или анализа.

Обозначим $a(r)$ — размытое изображение числа; это есть функция на $\mathscr{R}$, удовлетворяющая свойствам размытых средних (иллюстрированных рис. 2.5). Изображение $a(r)$ нужно интерпретировать как набор интервалов $A(\gamma)=\{r:a(r)\geqslant\gamma\}$, получаемых горизонтальными γ-срезами $a(r)$, причем каждый срез определяет интервальное число в виде индикаторной его модели $\mathscr{M}_{(\gamma)}=\langle P(A(\gamma))=1\rangle$, а все вместе при $0\leqslant\gamma\leqslant1$ — размытую модель числа в том плане, как это говорилось в предыдущем разделе.

Любые действия над числами рассчитываются по правилам интервальной арифметики (т. е. по правилам преобразований индикаторных моделей) для каждого γ-среза отдельно и объединяются затем по γ в изображение результата. В более детальном изложении, если $a_j(r)$ есть изображения чисел, то $A_j(\gamma)$ будут фигурами, зеркально к $a_j(r)$ расположенными относительно главной диагонали, т. е. это те же самые $a_j(r)$, но основаниями положенные на ось ординат. При каждом γ значениями $A_j(\gamma)$ будут интервалы, поэтому преобразование $f(a_1(r),\ \ldots,\ a_J(r))$ рассчитывается по правилам таких же действий над интервальными числами, итогом которых станут интервалы $F(\gamma)$, $0\leqslant\gamma\leqslant1$, и их осталось переложить основаниями с оси ординат на ось абсцисс, получая размытый результат $f(r)$.

Мы имеем, таким образом, модельную интерпретацию размытых чисел и арифметических действий, за подробностями которых отсылаем к обзорной книге [18]. К указанной в ней теории ведет и следующий шаг. Он состоит в определении размытых функций как отображений $z\to a_z(r)$, а интервалов от них — как интегралов от границ интервальных функций $A_z(\gamma)$ (γ-срезов), дающих интервальный результат с переводом затем его к изображению. Хотя и пришли к известному результату, но указанная нами аргументация, по-видимому, полезна в развитие концепции нечетких описаний и действий, потому что вовлекает для этих целей содержащийся в настоящей книге общий аппарат и делает концепцию нечеткости математически строгой с точки зрения этого аппарата.

2.4. СОВМЕСТНЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Совместные и частные интервальные модели. Рассматриваются совместные модели, описывающие результаты двух произвольных случайных явлений с исходами $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$.

Пусть $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ — прямое произведение двух пространств исходов, каждый элемент которого есть пара $(x,\ y)$, $x\in\mathscr{X}$, $y\in\mathscr{Y}$. Модель $\mathscr{M}^{xy}$ на этом произведении называется *совместной.* Она определяется согласованными средними $\overline{M}^{xy}f(x,\ y)$, $\forall f\in\mathscr{F}^{xy}$, где $\mathscr{F}^{xy}$ — область существования верхних средних (включающая, по крайней мере, все ограниченные сверху функции двух переменных). А задается — первичными средними $\widetilde{M}g(x,\ y)$, $g\in\mathscr{G}$, и тогда $\mathscr{M}^{xy}=\langle\widetilde{M}\mathscr{G}\rangle$.

Признаки $f(x,\ y)$ двух переменных называются *совместными*, а отдельно каждой переменной $f(x)$, $\varphi(y)$ — *частными*; частные образуют подклассы $\mathscr{F}^x$ и соответственно $\mathscr{F}^y$ совместных $\mathscr{F}^{xy}$.

Средние на подклассах частных признаков $\overline{M}f(x)$, $f(x)\in\mathscr{F}^x$, $\overline{M}\varphi(y)$, $\varphi\in\mathscr{F}^y$, очевидно, согласованы и определяют *частные модели $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$*. Итак, *частные модели получаются как часть средних совместной.*

Следующая теорема позволяет находить первичные средние частных моделей по совместной.

Теорема 2.1. О первичных признаках частных моделей. *Пусть $\mathscr{M}^{xy}=\langle\widetilde{M}\mathscr{G}\rangle$ — совместная модель и $\widetilde{M}g(x,\ y)$, $g\in\mathscr{G}$, суть ее первичные средние. Тогда соответствующая ей частная $\mathscr{M}^x$ на $\mathscr{X}$ будет определяться своими признаками вида $\inf\limits_y \sum\limits_i c^+{}_i g_i(x,\ y)$ с первичными средними на них, равными:*

$$\widetilde{M}^x[\inf_y \sum_i c_i^+ g_i(x,\ y)]=\sum_i c_i^+ \widetilde{M}g_i(x,\ y),\quad g_i\in\mathscr{G},$$

при всевозможном выборе неотрицательных коэффициентов $c^+{}_i$, $i=1,\ \ldots,\ k<\infty$.

В самом деле, на основании общей формулы продолжения, центрируя признаки, имеем:

$$\overline{M}^{xy}f(x)=\inf_{c+\sum c_i^+ g_i(x,\,y)\geqslant f(x)}[c+\sum c_i^+\widetilde{M}g_i]=$$

$$=\inf_{c,\ c_i^+}\left\{c:c+\sum c_i^+[g_i(x,\ y)-\widetilde{M}g_i]\geqslant f(x)\right\},$$

причем в условии на c, $c^+{}_i$ неравенство должно соблюдаться при всех $y\in\mathscr{Y}$, что равносильно подстановке в его левую часть функции

$$c+\inf_y[\sum c_i^+(g_i(x,\ y)-\widetilde{M}g_i)]=c+h_{\mathbf{c}}(x),\quad \mathbf{c}=(c_1,\ldots,\ c_k).$$

Функцию $h_{\mathbf{c}}(x)$ можно рассматривать как первичный признак для $\mathscr{M}^x$ с нулевым первичным средним. Для линейной комбинации таких признаков $\sum d^+{}_i h_{\mathbf{c}_i}(x)$ имеется мажорирующий признак $h_{\mathbf{c}^*}(x)$, $\mathbf{c}^*=\sum d^+{}_i\mathbf{c}_i$, с нулевым средним, поэтому

$$\overline{M}^x f(x)=\inf_{c,\ \mathbf{c}_i}\left\{c:c+\sum d_i^+ h_{\mathbf{c}_i}(x)\geqslant f(x)\right\}=$$

$$=\inf_{c,\ h_{\mathbf{c}^*}}\{c:c+h_{\mathbf{c}^*}(x)\geqslant f(x)\},$$

откуда и следует доказательство теоремы.

Таким образом, первичными для частной ИМ будут нижние грани $\inf\limits_y g(x,\ y)$, $g\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}$ (минимум берется по исключаемой переменной) вторичных признаков совместной модели с сохранением средних.

К примеру, если $\mathscr{M}^{xy}=\langle\widetilde{M}g\rangle$ определяется всего одним первичным средним $\widetilde{M}g(x,\ y)$, то первичным для $\mathscr{M}^x$ будет $\widetilde{M}[\inf\limits_y g(x,\ y)]=\widetilde{M}g$. Если первичных средних два $\mathscr{M}^{xy}=\langle\widetilde{M}g_1\rangle\wedge\wedge\langle\widetilde{M}g_2\rangle$, то для частной ИМ первичные средние выглядят так:

$$\widetilde{M}h_{\mathbf{c}}(x)=\widetilde{M}\inf_y[g_1(x,\ y)+c^+g_2(x,\ y)]=\widetilde{M}g_1+c^+\widetilde{M}g_2.$$

Их уже не два, а много по причине произвольности c^+. В общем, даже при конечном наборе первичных средних $\widetilde{M}g_i(x,\ y)$, $i=1,\ \ldots,\ k$, задающих $\mathscr{M}^{xy}$, нет гарантии, что частная $\mathscr{M}^x$ будет определяться конечным числом первичных значений, кроме ряда исключений, о которых и пойдет сейчас речь.

Пример 2.8. Пусть $\mathscr{X}=\{x_1,\ \ldots,\ x_k\}$, $\mathscr{Y}=\{y_1,\ \ldots,\ y_l\}$ и на произведении этих пространств заданы первичные вероятности, называемые совместными:

$$0\leqslant\overline{P}(x_i,\ y_j)\leqslant 1,\quad \sum_i\sum_j\overline{P}(x_i,\ y_j)\geqslant 1.$$

Эти вероятности согласованы и задают $\mathscr{M}^{xy}$. Первичными для частной $\mathscr{M}^x$ будут вероятности $\overline{P}(x_i)=\min\{1,\ \sum\limits_j\overline{P}(x_i,\ y_i)\}$. Любые же другие признаки, согласно теореме 2.1 имеющие вид

$$h_{\mathbf{c}}(x)=\inf_y\sum_i\sum_j c_{ij}^+\delta_{x_i}(x)\,\delta_{y_i}(y)=\sum\underline{c}_i^+\delta_{x_i}(x),$$

где $\underline{c}^+{}_i=\min c^+{}_{ij}$ вследствие неравенства $\widetilde{M}h_{\mathbf{c}}(x)=\sum\sum c^+{}_{ij}\overline{P}(x_i,\ y_j)\geqslant\geqslant\sum\limits_i\sum\limits_j\underline{c}^+{}_i\overline{P}(x_i,\ y_j)=\sum\limits_i\underline{c}^+{}_i\sum\limits_j\overline{P}(x_i,\ y_j)\geqslant\sum\underline{c}^+{}_i\overline{P}(x_i)$ поглощаются вероятностями $\overline{P}(x_i)$. В случае точных вероятностей $P(x_i,\ y_j)$, образующих совместное распределение: $\sum\sum P(x_i,\ y_j)=1$, частное распределение также будет точным, равным сумме $P(x_i)=\sum\limits_j P(x_i,\ y_j)$, что элементарно доказывается.

Следствие. *Частные признаки $g_i(x)$, имея согласованные средние и будучи первичными для совместной $\mathscr{M}^{xy}$, остаются точно такими же с теми же средними для частной $\mathscr{M}^x$.*

В самом деле, при нахождении по теореме 2.1 первичных признаков для $\mathscr{M}^x$ те из признаков $g_i\in\mathscr{G}$ совместной $\mathscr{M}^{xy}$, которые зависят только от переменной x, выносятся за знак инфимума

$$\inf_y[\sum_i d_i^+ g_i(x)+\sum_j c_j^+ g_j(x,\ y)]=\sum_i d_i^+ g_i(x)+\inf_y\sum_j c_j^+ g_j(x,\ y),$$

откуда видно, что сами эти $g_i(x)$ (а не их линейные комбинации) будут первичными для $\mathscr{M}^x$. Очевидно, согласованность их средних от $\mathscr{M}^{xy}$ передается к $\mathscr{M}^x$.

Пример 2.9. **Задание совместной модели частными первичными признаками.** Здесь будет рассмотрен случай, когда первичные признаки $g \in \mathscr{G}$ совместной модели $\mathscr{M}^{xy}$ разделяются на зависящие только от переменной x либо только от переменной y:

$$g(x, y) = \begin{cases} h(x), & h \in \mathscr{H}, \\ \psi(y), & \psi \in \Psi, \end{cases}$$

так что $\mathscr{G} = \mathscr{H} \cup \Psi$. И пусть их средние $\widetilde{M}h(x)$, $\widetilde{M}\psi(y)$ являются согласованными. Они же будут первичными для частных моделей (согласно теореме 2.1), причем, как нетрудно установить, на них распространяется свойство аддитивности средних:

$$\overline{M}^{xy}[f(x) + \varphi(y)] = \overline{M} f(x) + \overline{M} \varphi(y).$$

Разделение первичных признаков на функции только от x и только от y эквивалентно заданию отдельно $\mathscr{M}^x = \langle \widetilde{M}\mathscr{H} \rangle$ и $\mathscr{M}^y = \langle \widetilde{M}\Psi \rangle$ при полном отсутствии данных о причинной связи (зависимости) между исходами явлений $x \in \mathscr{X}$ и $y \in \mathscr{Y}$. Совместная модель равна пересечению $\langle \widetilde{M}\mathscr{H} \rangle \wedge \langle \widetilde{M}\Psi \rangle$ частных, но заданных каждая уже на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ наборами признаков только одной переменной.

Отношения между совместными и частными моделями.

1. Для голой совместной ИМ частная модель будет голой:

$$\mathscr{M}^{xy} = \mathscr{I}^{xy} \Rightarrow \mathscr{M}^x = \mathscr{I}^x.$$

Это ясно, поскольку, если ничего не известно об $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, то также не будет никаких данных от $\mathscr{X}$.

2. При переходе от совместных моделей к частным сохраняется иерархия в смысле отношений включения:

$$\mathscr{M}_1^{xy} \subset \mathscr{M}_2^{xy} \Rightarrow \mathscr{M}_1^x \subset \mathscr{M}_2^x$$

так как $\overline{M}_1^x f(x) = \overline{M}_1^{xy} f(x) \leqslant \overline{M}_2^{xy} f(x) = \overline{M}_2^x f(x)$).

Возникает вопрос, сохраняются ли алгебраические операции объединения и пересечения моделей? Для операции объединения — сохраняются:

3. $\mathscr{M}^{xy} = \bigvee \mathscr{M}_\theta^{xy} \Rightarrow \mathscr{M}^x = \bigvee \mathscr{M}_\theta^x$

(так как $\overline{M}^x f(x) = \overline{M}^{xy} f(x) = \sup\limits_\theta \overline{M}_\theta^{xy} f(x) = \sup\limits_\theta \overline{M}_\theta^x f(x)$).

А операция пересечения, в общем, не сохраняется:

4. $\mathscr{M}^{xy} = \bigwedge \mathscr{M}_\theta^{xy} \not\Rightarrow \mathscr{M}^x = \bigwedge \mathscr{M}_\theta^x$.

В самом деле, при $\mathscr{M}^{xy}{}_\theta = \langle \widetilde{M}\mathscr{G}_\theta \rangle$ первичным для их пересечения будет набор $\mathscr{G} = \bigvee \mathscr{G}_\theta$ со средними $\widetilde{M}g(x,y) = \inf\limits_\theta \widetilde{M}_\theta g(x, y)$, $g \in \mathscr{G}$. Теперь согласно теореме 2.1 первичными для $\mathscr{M}^x$ будут

$$\overline{M}^x [\inf_y \sum c_i^+ g_i(x, y)] = \sum c_i^+ \overline{M}^{xy} g_i(x, y) =$$

$$= \sum c_i^+ \inf_\theta \widetilde{M}_\theta g_i(x, y) \leqslant \inf_\theta [\sum c_i^+ \widetilde{M}_\theta g_i(x, y)],$$

где квадратные скобки и есть первичные средние моделей $\mathscr{M}^x{}_\theta$, а инфимум соответствует их пересечению.

Представление совместных моделей случайными преобразованиями. В начале настоящей главы изучались преобразования $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$. Это некоторые операторы, преобразующие «вход» x в «выход» y. Там нас больше интересовали, во-первых, способы описания самих преобразований: детерминированных $y = sx$ (см. § 2.1) и случайных (см. § 2.2), задаваемых переходными моделями $\mathscr{M}^y{}_x$, а во-вторых, расчет «выходной» модели $\mathscr{M}^y$ по виду преобразования и «входной» $\mathscr{M}^x$. Здесь нас интересует другой вопрос: как с помощью случайных преобразований (и особого их случая — детерминированных) можно задавать совместные интервальные модели $\mathscr{M}^{xy}$ на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$?

Пусть имеется модель $\mathscr{M}^x$ входа, т. е. известным путем определены согласованные $\widetilde{M}^x f(x)$, $f \in \mathscr{F}^x$. И пусть имеется случайное преобразование из $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$, задаваемое переходными $\mathscr{M}^y{}_x$, $\forall x \in \mathscr{X}$, т. е. при каждом x определены переходные средние $\widetilde{M}^y{}_x \varphi(y)$, $\varphi(y) \in \mathscr{F}^y{}_x$, где класс $\mathscr{F}^y{}_x$ при каждом x может быть, в общем, разным.

Произведением $\mathscr{M}^x$ на $\mathscr{M}^y{}_x$ назовем совместную модель на $\mathscr{M}^{xy}$, обозначаемую:

$$\mathscr{M}^{xy} = \mathscr{M}^x \mathscr{M}_x^y,$$

которая определяется средними:

$$\overline{M}^{xy} f(x, y) = \overline{M}^x \overline{M}_x^y f(x, y). \tag{2.4}$$

Правая часть (2.4) есть последовательное вычисление на первом шаге при каждом $x \in \mathscr{X}$ переходных средних $\overline{M}^y{}_x f(x, y)$ по $\mathscr{M}^y{}_x$ от $f(x, y)$ как функций переменной y, а поскольку переходные средние будут функциями x, т. е. признаками на $\mathscr{X}$, то на втором шаге уже от них берется среднее $\overline{M}^x$. Область существования $\mathscr{F}^{xy}$ произведения моделей составляют признаки $f(x, y)$, при каждом x принадлежащие $\mathscr{F}^y{}_x$, причем только та их часть, для которой $\overline{M}^y{}_x f \in \mathscr{F}^x$. Это, по крайней мере, все ограниченные функции двух переменных.

Формула (2.4) для нижнего среднего (нужно заменить f на $-f$) записывается $\underline{M}^{xy} f = \underline{M}^x \underline{M}^y{}_x f$.

Прокомментируем понятие произведения. По сути дела, если интерпретировать как $\mathscr{M}^y{}_x$, так и $\mathscr{M}^x$ в виде семейств точных моделей (с точными средними), то и на первом шаге, состоящем в вычислении переходных средних $\underline{M}^y{}_x f$, $\overline{M}^y{}_x f$, и на втором, когда по ним окончательно находятся $\underline{M} f$, $\overline{M} f$, рассматриваются каждый раз наихудшие возможные варианты внутри семейств, причем раздельно для $\mathscr{M}^x{}_y$ и $\mathscr{M}^x$ и раздельно для нижнего и верхнего среднего. Это то, какие данные имелись бы о среднем Mf в наименее благоприятном случае при наличии данных (в интервальном виде или в виде семейств) о модели входа и о случайном преобразовании.

Ниже нам понадобятся следующие достаточно очевидные свойства проноса функции переменной x за знак среднего $\overline{M}^{y}{}_{x}$ переходной модели:

$$\overline{M}^{xy} c^{+}(x) f(x, y) = \overline{M}^{x}[c^{+}(x)\overline{M}^{y}_{x} f(x, y)],$$

$$\overline{M}^{xy}[d(x)+f(x, y)] = \overline{M}^{x}[d(x)+\overline{M}^{y}_{x} f(x, y)],$$

где $c^{+}(x)$ — произвольная неотрицательная функция, а $d(x)$ — любая функция переменной x (не выводящая из класса $\mathcal{F}^{xy}$).

Восстановление сомножителей разложимой модели. Совместная модель $\mathcal{M}^{xy}$, записываемая в виде произведения $\mathcal{M}^{x}\mathcal{M}^{y}{}_{x}$, называется *разложимой*. Покажем, как по совместной разложимой восстанавливаются модели-сомножители. Относительно первого из них $\mathcal{M}^{x}$ проблем не возникает: это есть частная модель, средние которой $\overline{M}^{x}f(x)$ составляют часть средних $\overline{M}^{xy}f(x, y)$ совместной модели.

Проблема восстановления второго сомножителя $\mathcal{M}^{y}{}_{x}$ несколько сложнее. Для этого нужно выделить «характерные» для переходных моделей $\mathcal{M}^{y}{}_{x}$ классы признаков $f(x, y)$, средние $\overline{M}^{xy}f$ на которых ее и определят. Характерность их должна проявляться в том, что при разных x это совершенно разные, непересекающиеся классы, «остро откликающиеся» на изменения x. Отсюда догадка, что это должны быть дельта-образные по x функции.

Как и ранее, будем обозначать $\delta_{x_1}(x)$ индикаторную функцию элементарного события $x_1\in\mathcal{X}$. Символ $\overline{M}^{xy}$ для краткости заменяем на $\overline{M}$. Введем функцию $f(x, y)=\delta_{x_1}(x)\cdot\varphi(y)$, где $\varphi\in\mathcal{F}^{xy}$. Согласно (2.4)

$$\overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y) = \overline{M}^{x}\,\overline{M}^{y}_{x}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y) = \overline{M}^{x}\,\delta_{x_1}(x)\,\overline{M}^{y}_{x_1}\varphi(y) =$$

$$= \begin{cases} \overline{P}(x_1)\,\overline{M}^{y}_{x_1}\varphi(y), & \overline{M}^{y}_{x_1}\varphi(y)\geqslant 0,\\ \underline{P}(x_1)\,\overline{M}^{y}_{x_1}\varphi(y), & \overline{M}^{y}_{x_1}\varphi(y)<0,\end{cases}$$

где $\underline{P}(x_1)$, $\overline{P}(x_1)$ — границы вероятностей элементарного события x_1. Пусть $\overline{P}(x_1)>0$ и $\overline{M}\delta_{x_1}(x)\varphi(y)\geqslant 0$. Из второго неравенства следует $\overline{M}^{y}{}_{x_1}\varphi(y)\geqslant 0$, в результате чего

$$\overline{M}^{y}_{x_1}\varphi(y) = \frac{\overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y)}{\overline{P}(x_1)} \quad \text{при} \quad \overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y)\geqslant 0. \qquad (2.5)$$

Эта формула и определяет средние переходной $\mathcal{M}^{y}{}_{x_1}$ для тех $x_1\in\mathcal{X}$, для которых $\overline{P}(x_1)>0$.

Здесь требование $\overline{M}\delta_{x_1}(x)\varphi(y)\geqslant 0$ не является излишне обременительным. Действительно, если это неравенство не выполняется и $\varphi(y)$ ограничена, то оно будет выполнено для функции $\varphi_c(y)=\varphi(y)+c$ при $c\geqslant -\inf\varphi(y)$ в силу того, что $\varphi_c(y)\geqslant 0$. Определяя $\overline{M}^{y}{}_{x_1}\varphi_c(y)$ по (2.5), тем самым находим

$$\overline{M}^{y}_{x_1}\varphi(y) = \overline{M}^{y}_{x_1}[\varphi(y)+c]-c, \quad c\geqslant -\inf\varphi.$$

Таким образом, достаточно, чтобы (2.5) выполнялось для неотрицательных ограниченных функций $\varphi(y)$, так как для неограниченных оно получается предельным переходом от их усечений. Это своего рода формула продолжения границ. Итак, имеем.

Если $\mathcal{M}^{xy}$ разложима, причем частная $\mathcal{M}^{x}$ такова, что $\overline{P}(x_1)>0$ для всех $x_1\in\mathcal{X}$, то формула (2.5) позволяет восстановить переходные ИМ по совместной. При этом переходные и условные ИМ (при случившихся x) совпадают между собой.

Последняя часть следует из дополнения 1 к параграфу и смысл ее в том, что переходную модель можно восстановить, определяя условные согласно § 1.6 при истекших элементарных событиях $x_1\in\mathcal{X}$.

Разложимость совместной модели. А всякую ли совместную модель $\mathcal{M}^{xy}$ можно разложить на произведение частной и переходной (условной), т. е. интерпретировать связь между исходами $x\in\mathcal{X}$ и $y\in\mathcal{Y}$ действием случайного оператора? Увы, далеко нет! И тогда подстановка условных моделей в (2.4) приведет к расширенной по сравнению с $\mathcal{M}^{xy}$ модели: $\overline{M}^{x}\overline{M}^{y}{}_{x}f(x, y)\geqslant\geqslant\overline{M}f(x, y)$.

Пусть задана совместная модель $\mathcal{M}^{xy}$. Каким свойствам должны удовлетворять ее согласованные средние, чтобы она была разложима? Для решения этого вопроса поступаем так, как если бы $\mathcal{M}^{xy}$ была разложима, т. е. вычисляем переходные средние по (2.5), заменив $\varphi(y)$ на $f(x, y)$:

$$\overline{M}^{y}_{x_1}f(x, y) = \frac{\overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,f(x, y)}{\overline{P}(x_1)} \quad \text{при} \quad \overline{M}\,\delta_{x_1}f\geqslant 0, \quad \overline{P}(x_1)>0.$$

А далее смотрим, получится ли при подстановке этого выражения в правую часть (2.4) значение $\overline{M}f(x, y)$, и если это так для всех $f\in\mathcal{F}^{xy}$, то это дает совершенно веские основания считать, что $\mathcal{M}^{xy}$ разложима.

Теорема 2.2. О разложимости совместных моделей. *Если $\overline{P}(x)>0$, $\forall x\in\mathcal{X}$, то для разложимости совместной модели $\mathcal{M}^{xy}$ на произведение $\mathcal{M}^{x}\mathcal{M}^{y}{}_{x}$ необходимо и достаточно выполнения при всех $x_1\in\mathcal{X}$ и любых неотрицательных $f^{+}(x, y)$ из $\mathcal{F}^{xy}$ тождества:*

$$\overline{M}^{x_1}\left[\frac{\overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,f^{+}(x, y)}{\overline{P}(x_1)}\right]\equiv\overline{M}f^{+}(x, y),$$

где $\overline{M}^{x_1}$ есть среднее по частной $\mathcal{M}^{x}$. При этом переходная модель совпадает с условной.

Доказательство вынесено в дополнение 2 к параграфу.

Прокомментируем требование ненулевых верхних вероятностей $\overline{P}(x)>0$ теоремы. В большинстве реальных задач число данных о явлении конечно, что соответствует моделям $\mathcal{M}^{xy}$ конечной размерности. Для них (если сразу исключить невозможные исходы) обязательно верхние вероятности отдельных исходов ненулевые. Нулевые же вероятности $\overline{P}(x)\equiv 0$ есть предельный случай при неограниченном увеличении точности модели. Исходя из

4—13

этого должна интерпретироваться теорема 2.2 и ее основное тождество.

Посылки теоремы 2.2 весьма серьезны и труднопроверяемы. Отметим одно простое свойство, необходимое для разложимости совместной модели. Оно состоит в том, что для всех $\varphi(y)\in\mathcal{F}^{xy}$ и c должно быть справедливо равенство

$$\overline{M}\delta_{x_1}(x)[\varphi(y)-c]=\begin{cases}\overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y)-c\overline{P}(x_1) & \text{при}\geqslant 0,\\ \overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y)-c\,\underline{P}(x_1) & \text{при}<0,\end{cases}$$

где условие $\geqslant 0$ и <0 относится к значению среднего слева. Рассматриваемое свойство разложимых моделей выводится точно так же, как это сделано при $c=0$ при выводе (2.5). Оно иллюстрируется рис. 2.6, где представлен график значений среднего как функции параметра сдвига c. В области положительных значений среднего, а конкретнее, при c таких, что $\overline{M}^y{}_{x_1}\varphi(y)\geqslant c$, это есть линейная функция c. Так же, как при отрицательных, соответствующих $\overline{M}^y{}_x\varphi(y)<c$. Между ними функция терпит излом.

Рассуждение останется верным, если $\varphi(y)$ заменить на $f(x,y)$. Тогда $\delta_{x_1}(x)[f(x,\ y)-c]$ есть, по сути, вертикальный дельта-вырез функции $f(x,\ y)-c$ по координате $x=x_1$, а рассматриваемое нами свойство на срезе — как линейность оператора $\overline{M}$ к параметру сдвига c, преломленная согласно рис. 2.6 при пересечении оси.

Первичные средние разложимых интервальных моделей. Пусть $\mathcal{M}^{xy}=\mathcal{M}^x\mathcal{M}^y{}_x$ есть разложимая совместная модель и пусть $\mathcal{M}^x=\langle\overline{M}\mathcal{H}\rangle$, $\mathcal{M}^y{}_x=\langle\overline{M}^y{}_x\Psi\rangle$ заданы верхними первичными значениями $\overline{M}^xh(x)$, $h\in\mathcal{H}$; $\overline{M}^y{}_x\psi(x,\ y)$, $\psi\in\Psi$, где $h(x)$ — частные признаки, а $\psi(x,\ y)$ — первичные признаки на $\mathcal{Y}$ при заданных x, называемые переходными.

Здесь изучается связь между первичными средними совместной модели и моделями-сомножителями.

Теорема 2.3. *Интервальная модель в виде произведения $\mathcal{M}^{xy}=\langle\overline{M}^x\mathcal{H}\rangle\langle\overline{M}^y{}_x\Psi\rangle$ определяется центрированными признаками*

$$\overset{\circ}{\mathcal{G}}=\{h(x)-\overline{M}h,\ \ h\in\mathcal{H}\}\cup$$
$$\cup\{c^+(x)\,[\psi(x,\ y)-\overline{M}{}^y_x\psi],\psi\in\Psi,\quad\forall c^+(x)\}\qquad(2.6)$$

все с нулевыми первичными средними: $\overline{M}\overset{\circ}{g}=0$, $\forall\overset{\circ}{g}\in\overset{\circ}{\mathcal{G}}$, причем

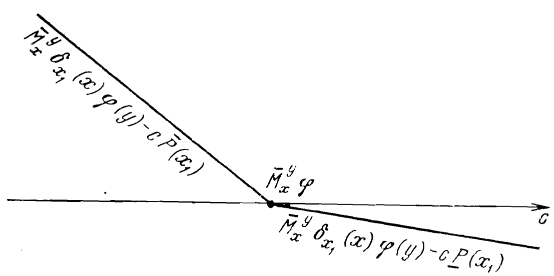


Рис. 2.6. Свойство разложимости модели

согласованным средним $\overline{M}^y{}_x\overset{\circ}{\psi}=\overline{M}^y{}_x\psi$ соответствуют согласованные значения $\overline{M}\overset{\circ}{g}=\overline{M}g$, $\overset{\circ}{g}=c^+(x)\,[\psi-\overline{M}^y{}_x\psi]$.

Прежде чем доказать теорему, дадим ее толкование. Обозначим $\overset{\circ}{h}(x)=h(x)-\overline{M}h$, $\overset{\circ}{\psi}(x,\ y)=\psi(x,\ y)-\overline{M}^y{}_x\psi$ — центрированные, т. е. приведенные к нулевым верхним средним $\overline{M}\overset{\circ}{h}=\overline{M}^y{}_x\overset{\circ}{\psi}=0$, первичные признаки как частной, так и переходной модели. Очевидно, $\langle\overline{M}^x\mathcal{H}\rangle=\langle\overline{M}^x\overset{\circ}{\mathcal{H}}\rangle$, $\langle\overline{M}^y{}_x\Psi\rangle=\langle\overline{M}^y{}_x\overset{\circ}{\Psi}\rangle$. Тогда теорема утверждает, что центрированными (с нулевыми средними) первичными признаками произведения останутся частные $\overset{\circ}{h}(x)\in\overset{\circ}{\mathcal{H}}$ признаки, дополненные совместными вида $\overset{\circ}{\psi}(x,\ y)c^+(x)$, $\overset{\circ}{\psi}\in\Psi$, равными центрированным переходным признакам, умноженным на произвольные неотрицательные функции $c^+(x)$ переменной x.

Для доказательства выпишем общее выражение среднего $\overline{M}f(x,\ y)$ разложимой модели через центрированные первичные значения сомножителей, реализующее согласно (2.4) двухшаговую процедуру вычисления:

$$\overline{M}f(x,\ y)=\overline{M}^x\,\overline{M}{}^y_x\,f(x,\ y)=$$
$$=\overline{M}^x\,C(x)=\inf\Big\{d:d+\sum d_j^+\overset{\circ}{h}_j(x)\geqslant C(x)\Big\},$$

где $C(x)=\inf\{c(x):c(x)+\sum c^+{}_j(x)\psi_j(x,\ y)\geqslant f(x,\ y)\}$. Сводя вместе два ограничения: одно на выбор d, а другое — на выбор $c(x)$, запишем их вместе, тогда окажется в наших руках заменить $C(x)$ на $c(x)$, сведя вычисление среднего к нахождению $\overline{M}f(x,\ y)=\inf\{d:d+\sum d^+{}_j\overset{\circ}{h}_j(x)\geqslant c(x),\ \ c(x)+\sum c^+{}_j(x)\times\times\psi_j(x,\ y)\geqslant f(x,\ y)\}$. В силу произвольности $c(x)$ первое ограничение вполне может быть заменено равенством, подставляя из которого $c(x)$ во второе ограничение, получаем $d+\sum d^+{}_j\overset{\circ}{h}_j(x)+\sum c^+{}_j(x)\overset{\circ}{\psi}(x,\ y)\geqslant f(x,\ y)$, что соответствует утверждаемым теоремой признакам, определяющим модель.

Замечание. В теореме 2.3 центрированные признаки $c^+(x)\overset{\circ}{\psi}(x,\ y)$ не при всех $c^+(x)$ будут обязательно согласованными и не все обязательно нужно считать первичными. Например, любая функция $c^+{}_1(x)$ есть первичный признак совместной модели, а форма $b^+c^+{}_1(x)+c$ дает хотя внешне другой, но фактически тот же самый признак. Сказанное относится и к $c^+{}_j(x)\overset{\circ}{\psi}_j(x,\ y)$, $b^+c^+{}_j(x)\overset{\circ}{\psi}_j(x,\ y)$, поэтому коэффициенты $c^+(x)$ можно каким-либо образом нормировать, например, полагая их принимающими значения от 0 до 1.

Из теоремы 2.3 следует, что за счет произвольности коэффициентов $c^+(x)$ как функций переменной x произведение моделей будет определяться значительно большим числом первичных значений, иметь большую размерность, нежели составляющие модели вместе взятые. В частности, размерность произведения ИМ несравненно выше размерностей сомножителей и может, в принципе, быть бесконечной.

Пример 2.10. Пусть $\underline{P}(A_1)$, $\overline{P}(A_1)$, $A_1\subset\mathscr{X}$ — две первичные вероятности, определяющие $\mathscr{M}^x$, и пусть $\underline{P}_x(B_1)$, $\overline{P}_x(B_1)$, $B_1\subset\mathscr{Y}$, — также две вероятности, задающие переходную ИМ размерности два $\mathscr{M}^{y}{}_{x}$. Нетрудно видеть, что и $\mathscr{M}^x$, и $\mathscr{M}^{y}{}_{x}$ есть ИРВ. Первичными признаками $\mathring{g}$ произведения $\mathscr{M}^x\mathscr{M}^{y}{}_{x}$, центрированными к нулевым средним, будут $A_1(x)-\overline{P}(A_1)$, $-A_1(x)+\underline{P}(A_1)$, $c^+(x)[B_1(y)-\overline{P}_x(B_1)]$, $c^+(x)[-B_1(y)+\underline{P}_x(B_1)]$ и для каждого из них $\overline{M}\mathring{g}=0$. Будем считать $0\leqslant c^+(x)\leqslant 1$. Как видим, хотя сомножителями являются ИРВ, их произведение есть ИМ на $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ с увеличенным числом центрированных первичных признаков, к которым, в частности, относятся

$$\overline{M}A(x)[B_1(y)-\overline{P}_x(B_1)]=0,\quad \overline{M}A(x)[-B_1(y)+\underline{P}_x(B_1)]=0$$

при любом событии $A\subset\mathscr{X}$. Чем шире пространство $\mathscr{X}$, т. е. чем больше элементарных исходов оно содержит, тем богаче делается состав набора первичных признаков, большей становится размерность совместной ИМ. Минимальной будет размерность при двух исходах $\mathscr{X}=\{x_1, x_2\}$. Тогда $A_1=x_1$ и первичных средних совместной ИМ всего шесть: четыре указаны выше двумя равенствами с подстановкой туда $A(x)=\delta_{x_1}(x)$ и $A(x)=\delta_{x_2}(x)$, и две исходные $\underline{P}(x_1)$ и $\overline{P}(x_1)$. При этом $\underline{P}_x(B_1)$ и $\overline{P}_x(B_1)$, в общем, могут быть разными при $x=x_1$ и $x=x_2$. При возрастании числа элементарных исходов пространства $\mathscr{X}$ размерность произведения неограниченно увеличивается, несмотря на то, что размерности сомножителей остаются равными двум.

Теорема 2.3 дает ответ на вопрос, какими групповыми свойствами должны обладать первичные признаки совместной ИМ для ее разложимости. Из этой теоремы вытекает.

Следствие. *Необходимым и достаточным условием разложимости $\mathscr{M}^{xy}$ является представимость ее центрированного набора первичных признаков в виде* (2.6).

Но трудности как раз состоят в представлении набора первичных признаков в виде (2.6). Очевидно, набор $\mathscr{G}$ должен быть достаточно богат. Одной из необходимых предпосылок разложимости является то, что наряду с первичным признаком g набору $\mathscr{G}$ должно принадлежать произведение $c^+(x)[g(x, y)-\overline{M}^{y}{}_{x}g]$, $\forall c^+(x)\geqslant 0$, где при $\overline{P}(x_1)>0$: $\overline{M}^{y}{}_{x_1}g=\overline{M}g(x, y)\delta_{x_1}(x)/\overline{P}(x_1)$ согласно (2.5).

Однако если $\mathscr{M}^{xy}$ не разложима, то всегда можно подыскать более широкую разложимую модель: $\mathscr{M}^x\mathscr{M}^{y}{}_{x}=\mathscr{M}^{xy}{}_{*}\supset\mathscr{M}^{xy}$. В худшем случае это будет голая совместная модель $\mathscr{I}^{xy}$, которая всегда разложима: $\mathscr{I}^{xy}=\mathscr{I}^x\mathscr{I}^{y}{}_{x}$, что легко проверяется.

Так как пересечение двух разложимых моделей не будет, в общем, разложимой моделью, то нельзя говорить о минимальной содержащей $\mathscr{M}^{xy}$ разложимой модели. Выбор разложимого расширения оказывается неоднозначным.

Вообще, напрашивается вывод, что раз разложимыми являются совместные модели очень ограниченного класса, то произведение не есть единый способ представления, а всего лишь удобный прием задания моделей совместных явлений, отражающий физическую природу перехода одного в другое.

Замечания. 1. Сказанное вступает в диссонанс с общеизвестными свойствами точных распределений вероятностей, всегда разложимых, поскольку для них определены точные условные (они же переходные) распределения вероятностей. Так, для точных вероятностей $P(x_i, y_i)$ на дискретных пространствах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ условное распределение получается по хорошо известной формуле

$$P_{x_i}(y_j)=P(x_i, y_j)/P(x_i),$$

в знаменателе которой стоит частное распределение (то же и для плотностей вероятностей на непрерывных пространствах). Внутри этого (узкого) класса моделей переход к условным (апостериорным) распределениям прост и универсален.

2. Описания моделей семействами распределений вероятностей расширяет возможности как самих распределений, так и их разложений, но и здесь имеется барьер в виде громоздкости такого типа описаний. В самом деле, в описаниях ИМ будут обязательно присутствовать фразы типа: «Все те распределения вероятностей, для которых $Mg\in[\underline{M}g, \overline{M}g]$, $g\in\mathscr{G}$, или же для которых $P(B)\in[\underline{P}(B), \overline{P}(B)]$, $B\in\mathscr{B}$, ...», и слово «все» во многом делает неконкретным, неконструктивным поэлементный состав модели. В частных случаях облегчение достигается сокращением семейств до обозримых размеров, но возможности такого упрощения охватывают, в основном, узкий класс моделей в виде параметрических семейств распределений вероятностей.

Подчиненные произведения. Предыдущими двумя замечаниями подготовлена почва для более широкого использования произведений моделей в совокупности с множественным их описанием как объединений семейств. Пусть совместная модель задана в следующем виде:

$$\mathscr{M}^{xy}=\bigvee_{\theta}\mathscr{M}^{xy}_{\theta}=\bigvee_{\theta}\mathscr{M}^{x}_{\theta}\,\mathscr{M}^{y}_{\theta,x},$$

где правая часть называется *подчиненным параметру* θ *произведением моделей.* Здесь заведомо семейство $\mathscr{M}^{xy}{}_{\theta}$, $\theta\in\Theta$, выбирается из разложимого класса.

Подчиненное произведение есть сокращенная запись следующего представления средних:

$$\overline{M}f(x, y)=\sup_{\theta}\overline{M}^{x}_{\theta}\,\overline{M}^{y}_{\theta,x}f(x, y).$$

Замечание. Произведение моделей $\mathscr{M}^x\mathscr{M}^{y}{}_{x}$, если каждая есть объединение: $\mathscr{M}^x=\bigvee_{\theta}\mathscr{M}^{x}{}_{\theta}$, $\mathscr{M}^{y}{}_{x}=\bigvee_{\vartheta}\mathscr{M}^{y}{}_{\vartheta,x}$, может рассматриваться как двойное объединение $\bigvee_{\theta}\bigvee_{\vartheta}\mathscr{M}^{x}{}_{\theta}\mathscr{M}^{y}{}_{\vartheta\,x}$, в котором θ и ϑ пробегают свои значения (возможно, из одного и того же множества Θ) несвязанно друг с другом. В этом состоит отличие от подчиненного произведения, для которого $\theta=\vartheta$ и, следовательно, параметры θ и ϑ сомножителей в значениях синхронны друг другу.

Введение подчиняющего параметра θ обретает наглядность и даже естественность, если он имеет физическую интерпретацию как параметр связи средних частной и переходных моделей, как параметр влияния на оба явления $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ какого-либо одного постороннего фактора, описываемого неизвестным значением θ.

Например, пусть $\mathscr{X}$ описывает количество перегноя в почве, а $\mathscr{Y}$ — урожайность, скажем, травы. Эти два фактора будут зависеть от погодных условий, например от количества осадков. Это количество и может служить подчиняющим параметром θ.

Избавиться от влияния подчиняющего параметра можно, переходя к более широкой модели на основании следующего включения:

$$\bigvee_{\theta} \mathscr{M}^{x}_{\theta} \mathscr{M}^{y}_{\theta,\, x} \subset \left(\bigvee_{\theta} \mathscr{M}^{x}_{\theta}\right) \left(\bigvee_{\theta} \mathscr{M}^{y}_{\theta,\, x}\right).$$

Точно так же расширением можно избавиться от влияния x в переходной модели произведения $\mathscr{M}^{x}\mathscr{M}^{y}{}_{x}$, заменив $\mathscr{M}^{y}{}_{x}$ объединением по x. К чему мы таким образом придем, видно из следующего заголовка.

Свободные произведения. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ дают исходы двух различных явлений и на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ задана совместная $\mathscr{M}^{xy}$. Относительно нее вводится определение.

Явление $\mathscr{Y}$ называется свободным от $\mathscr{X}$, если совместная $\mathscr{M}^{xy}$ разлагается на произведение

$$\mathscr{M}^{xy} = \mathscr{M}^{x} \mathscr{M}^{y}, \quad \overline{M} f(x,\ y) = \overline{M}^{x}\, \overline{M}^{y} f(x,\ y), \quad \forall f \in \mathscr{F}^{xy}, \tag{2.7}$$

в котором переходная $\mathscr{M}^{y}{}_{x} = \mathscr{M}^{y}$ не зависит от x. Такое *произведение моделей называется свободным.* Частными для $\mathscr{M}^{x}\mathscr{M}^{y}$, очевидно, будут $\mathscr{M}^{x}$ и $\mathscr{M}^{y}$.

При $\mathscr{Y}$ свободном от $\mathscr{X}$ совместное среднее $\overline{M}^{xy}$ обладает свойствами:

$$\overline{M} f^{+}(x)\, \varphi^{+}(y) = \overline{M} f^{+}(x)\, \overline{M}\, \varphi^{+}(y);$$

$$\overline{M}\, [g(x) + f^{+}(x)\, \varphi(y)] = \overline{M}\, [g(x) + f^{+}(x)\, \overline{M}\, \varphi(y)];$$

$$\overline{M}\, [f(x) + \varphi(y)] = \overline{M} f(x) + \overline{M}\, \varphi(y).$$

Свобода $\mathscr{Y}$ от $\mathscr{X}$ имеет тот смысл, что, зная исход x явления на $\mathscr{X}$, ничего нового нельзя сказать относительно статистической модели на исходах последующего за ним явления $\mathscr{Y}$. Тем не менее из самой структуры формулы (2.7) следует, что каждый исход x может влиять на процедуру выбора исходов явления $\mathscr{Y}$ в рамках $\mathscr{M}^{y}$. Чем шире $\mathscr{M}^{y}$, тем большая степень такого влияния может иметь место. При точных $\mathscr{M}^{y}$ на дискретных $\mathscr{Y}$ свобода, как нетрудно видеть, эквивалентна независимости в классическом понимании.

Таким образом, понятие свободы обретает свой смысл лишь для неточных моделей, т. е. если есть выбор, неопределенность.

Рассмотрим, как будут «звучать фразы о свободе» в ракурсе первичных признаков. Из теоремы 2.3 и ее следствия имеем.

Утверждение 2.4. *Для того чтобы явление на $\mathscr{Y}$ было свободным от $\mathscr{X}$, необходимо и достаточно, чтобы набор первичных признаков совместной $\mathscr{M}^{xy}$ мог быть приведен к виду*

$$\mathring{\mathscr{G}} = \{h(x) - \breve{M}h,\ h \in \mathscr{H}\} \cup \{c^{+}(x)\, [\psi(y) - \breve{M}\psi], \quad \psi \in \Psi,$$

$$\forall c^{+}(x) \geqslant 0\},$$

все с нулевыми средними: $\breve{M}\mathring{g} \equiv 0,\ \mathring{g} \in \mathring{\mathscr{G}}$. *Тогда*

$$\mathscr{M}^{xy} = \langle \breve{M}\ \mathring{\mathscr{G}} \rangle = \langle \breve{M}^{x}\ \mathscr{H} \rangle\ \langle \breve{M}^{y}\, \Psi \rangle.$$

Понятие свободы не симметрично. А именно, произведение $\mathscr{M}^{x}\mathscr{M}^{y}$ есть не то же самое, что $\mathscr{M}^{y}\mathscr{M}^{x}$. Например, пусть $\mathscr{M}^{x} = \langle \overline{M}h \rangle$, $\mathscr{M}^{y} = \langle \overline{M}\psi \rangle$ — две частные модели, определенные каждая одним своим первичным средним $\overline{M}h$ и $\overline{M}\psi$. Тогда первичными признаками свободного произведения $\mathscr{M}^{x}\mathscr{M}^{y}$, приведенными к нулевым верхним средним, будут

$$\mathring{\mathscr{G}}_{1} = \{h(x) - \overline{M}h\} \cup \{c^{+}(x)\, [\psi(y) - \overline{M}\,\psi], \quad \forall c^{+}(x) \geqslant 0\},$$

а перевернутого произведения $\mathscr{M}^{y}\mathscr{M}^{x}$ — будут уже другие признаки

$$\mathring{\mathscr{G}}_{2} = \{d^{+}(y)\, [h(x) - \overline{M}h], \quad \forall d^{+}(y) \geqslant 0\} \cup \{\psi(y) - \overline{M}\,\psi\}.$$

Первая модель соответствует свободе $\mathscr{Y}$ от $\mathscr{X}$, а вторая — $\mathscr{X}$ от $\mathscr{Y}$. Разницу между ними поясним примером.

Пример 2.11. Пусть $\mathscr{X} = \{x_1,\ x_2\}$, $\mathscr{Y} = \{y_1,\ y_2\}$, при этом $\mathscr{M}^{x}$ определяется первичной вероятностью $\overline{P}(x_1)$, а на $\mathscr{Y}$ ИМ голая $\mathscr{M}^{y} = \mathscr{I}^{y}$. Тогда для произведения $\mathscr{M}^{x}\mathscr{I}^{y}$, относительно которого $\mathscr{Y}$ свободен от $\mathscr{X}$, первичный признак будет всего один $\delta_{x_1}(x)$ и для конкретного произведения признаков имеем

$$\overline{M}^{x}\, \overline{M}^{y}\, [\delta_{x_1}(x) - a]\, \delta_{y_1}(y) = \max_{x,\, y}\, [\delta_{x_1}(x) - a]\, \delta_{y_1}(y) = 1 - a.$$

При вычислениях здесь, как видно, первичная вероятность $\overline{P}(x_1)$ не участвовала. Для произведения $\mathscr{I}^{y}\mathscr{M}^{x}$ с переставленными сомножителями уже $\mathscr{X}$ будет свободен от $\mathscr{Y}$, а первичными будут $[d_1 + \delta_{y_1}(y) + d_2\delta_{y_2}(y)]\, [\delta_{x_1}(x) - \overline{P}(x_1)]$, поэтому $\overline{M}^{y}\overline{M}^{x}[\delta_{x_1}(x) - \overline{P}(x_1)]\, \delta_{y_1}(y) = \overline{M}^{y}\delta_{y_1}(y)\, \overline{M}^{x}[\delta_{x_1}(x) - \overline{P}(x_1)] = 0$. Это отличается от предыдущего при $a = \overline{P}(x_1)$.

Таким образом, свобода $\mathscr{Y}$ от $\mathscr{X}$ не тождественна свободе $\mathscr{X}$ от $\mathscr{Y}$. Хотя у свободных произведений обоих видов одинаковыми будут средние на признаках вида $f^{+}(x)\varphi^{+}(y)$:

$$\overline{M}^{x}\, \overline{M}^{y} f^{+}(x)\, \varphi^{+}(y) = \overline{M}^{y}\, \overline{M}^{x} f^{+}(x)\, \varphi^{+}(y),$$

но, в общем, они будут разными на совместных признаках $f(x,\, y)$.

Если эксперимент $\mathscr{Y}$ связать с поведением человека, то вкладываемый в слово «свобода» $\mathscr{Y}$ «житейский» смысл подобен фразам: «как хочет, так и поступает», «что волен, то и делает», как это видно из следующего примера.

Пример 2.12. Рассмотрим такую реальную ситуацию. Пусть первый раз монета подбрасывается так, что вероятность исхода равна 1/2, образуя эксперимент $\mathscr{X}$ с двумя исходами. Другой раз монета не подбрасывается, а показывается так или иначе некоторым лицом. Показ производится осмысленным образом, поэтому вероятность герба может быть любой от 0 до 1, в результате $\mathscr{M}^y=\mathscr{I}^y$. Ясно, что эксперимент $\mathscr{Y}$ свободен от $\mathscr{X}$, так что можно записать $\mathscr{M}^{xy}=\mathscr{M}^x\mathscr{I}^y$. Тем не менее свобода здесь не означает независимости: решение относительно того, какую монету показать, может созреть на основании результата подбрасывания. Свобода лишь означает, что о намерениях лица, показывающего монету, ничего не известно: они могут быть любыми.

Если поменять в этом примере последовательность действий: сначала производить эксперимент $\mathscr{Y}$ (показ монеты), а затем $\mathscr{X}$ (случайное подбрасывание), то получим совершенно другое произведение $\mathscr{I}^y\mathscr{M}^x$, относительно которого $\mathscr{X}$ не только свободен от $\mathscr{Y}$, но и более того, не зависит от $\mathscr{Y}$ в том смысле, который будет дан в следующем параграфе.

Любой совместной модели, разложимой на произведение $\mathscr{M}^x\mathscr{M}^y{}_x$, всегда можно подыскать минимальную более широкую $\mathscr{M}^{xy}{}_*$, относительно которой $\mathscr{Y}$ был бы свободен от $\mathscr{X}$. Для этого надо взять объединение переходных ИМ $\mathscr{M}^y{}_*=\bigvee\limits_{\forall x}\mathscr{M}^y{}_x$ и образовать произведение $\mathscr{M}^{xy}{}_*=\mathscr{M}^x\mathscr{M}^y{}_*$. Наконец, для голой совместной модели имеет место равенство $\mathscr{I}^{xy}=\mathscr{I}^x\mathscr{I}^y=\mathscr{I}^y\mathscr{I}^x$, так что $\mathscr{Y}$ всегда будет свободен от $\mathscr{X}$ и наоборот.

Дополнения.

1. Теорема. *Если $\bar P(x)>0$, $\forall x\in\mathscr{X}$, то для разложения совместной $\mathscr{M}^{xy}$ на произведение $\mathscr{M}^x\mathscr{M}^y{}_x$ необходимо и достаточно выполнения тождества*

$$\overline{M}\,\overline{\overline{M}}_x f(x,\ y)\equiv\overline{M}f(x,\ y),\quad \forall f\in\mathscr{F}^{xy},$$

где $\overline{\overline{M}}_x$ есть условные средние при заданных $x\in\mathscr{X}$.

Докажем это. Достаточность очевидна из равенства (2.4). Для доказательства необходимости требуется доказать, что условные средние $\overline{\overline{M}}_x$ совпадают с переходными $\overline{M}^y{}_x$, определенными формулой (2.5), т. е. требуется доказать равенство

$$\max_{\underline{P}(x_1)\leqslant P(x_1)\leqslant\bar P(x_1)}\frac{\overline{M}_{P(x_1)}\,\delta_{x_1}\,\varphi}{P(x_1)}=\frac{\overline{M}\,\delta_{x_1}\,\varphi}{\bar P(x_1)},\tag{*}$$

где $\bar P(x_1)>0$ и $\overline{M}\delta_{x_1}\varphi\geqslant 0$. В левой части стоит условное среднее $\overline{\overline{M}}_x\varphi$, расписанное по формуле (1.15), и $\overline{M}_{P(x_1)}$ есть среднее по сечению $\mathscr{M}^{xy}\wedge\langle P(x_1)\rangle$, согласно формуле (1.9) равное

$$\overline{M}_{P(x_1)}\ \delta_{x_1}\,\varphi=\min_c\{\overline{M}\,[\varphi(y)-c]\,\delta_{x_1}(x)+cP(x_1)\}.\tag{**}$$

На основании записи (2.4) и свойств средних переходной ИМ имеет место равенство

$$\overline{M}\,[\varphi(y)-c]\,\delta_{x_1}(x)=\overline{M}^x\,\overline{M}^y_x\,[\varphi(y)-c]\,\delta_{x_1}(x)=$$
$$=\bar P(x_1)\,\overline{M}^y_{x_1}[\varphi(y)-c]=\bar P(x_1)\,\overline{M}^y_{x_1}\,\varphi(y)-c\bar P(x_1)=$$
$$=\overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y)-c\,\bar P(x_1),\tag{***}$$

при $c\leqslant\overline{M}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y)/\bar P(x_1)$,

где последнее неравенство гарантирует $\overline{M}[\varphi(y)-c]\,\delta_{x_1}(x)\geqslant 0$, $\overline{M}^y{}_x[\varphi(y)-c]\geqslant 0$. Подстановка равенства (***) в (**) дает

$$\overline{M}_{P(x_1)}\,\delta_{x_1}(x)\,\varphi(y)=\min_{c\leqslant\overline{M}\delta_{x_1}\varphi/\bar P(x_1)}[\overline{M}\,\delta_{x_1}\,\varphi-c\bar P(x_1)+cP(x_1)]=$$
$$=\overline{M}\,\delta_{x_1}\,\varphi\,[P(x_1)/\bar P(x_1)].$$

Отсюда очевидно становится (*), что и требовалось.

2. Доказательство теоремы 2.2. Необходимость следует из формулы (2.5), которая не изменится, если заменить в ней $\varphi(y)$ на $f(x,\ y)$. Для доказательства достаточности нужно формально определить переходные средние для $f^+(x,\ y)$ по указанной перед теоремой модификации формулы (2.5) и продолжить по свойству переноса на все ограниченные функции и далее устремлением уровней усечений к бесконечности — на неограниченные из $\mathscr{F}^{xy}$. Последняя часть теоремы 2.2 о совпадении переходной модели с условной вытекает из теоремы дополнения 1.

3. Как это видно из рис. 2.6, при $P(x_1)>0$ границы переходной $\overline{M}^y{}_{x_1}\varphi(y)$ являются решениями относительно m уравнения

$$\overline{M}\,[\varphi(y)-m]\,\delta_{x_1}(x)=0.$$

Если же $\bar P(x_1)>0$, но не исключается $\underline{P}(x_1)=0$, тогда

$$\overline{M}^y_{x_1}\,\varphi(y)=\inf\{c:\overline{M}\,[\varphi(y)-c]\,\delta_{x_1}(x)\leqslant 0\}.$$

Наконец, учитывая, что $\overline{M}[\varphi(y)-c]\delta_{x_1}(x)$ в области положительных ее значений есть прямая по c, находим $\overline{M}^y{}_{x_1}\varphi$ как пересечение этой прямой (определяемой ее значениями при любых двух c_1 и c_2) с осью, так что для $\forall c_2>c_1$

$$\overline{M}^y_{x_1}\,\varphi=\frac{c_1+\overline{M}\,(\varphi-c_2)\,\delta_{x_1}-c_2\,\overline{M}\,(\varphi-c_1)\,\delta_{x_1}}{\overline{M}\,(\varphi-c_2)\,\delta_{x_1}-\overline{M}\,(\varphi-c_1)\,\delta_{x_1}}.$$

4. При $\bar P(x)>0$, $\forall x$, для разложения совместной модели на произведение необходимым является выполнение следующего тождества:

$$\overline{M}\left[f(x,\ y)-\frac{\overline{M}f(x,\ y)\,\delta_{x_1}(x)}{\bar P(x_1)}\right]c^+(x)\equiv 0,\quad\forall c^+(x).$$

В самом деле, используя формулу, предшествующую теореме 2.2, имеем

$$\overline{M}\,[f-\overline{M}\,f\,\delta_x/\bar P(x)]\,c^+(x)=\overline{M}^x\,\overline{M}^y_x\left(f-\overline{M}^y_x f\right)\,c^+(x)=$$
$$=\overline{M}^x\,c^+(x)\,[\overline{M}^y_x f-\overline{M}^y_x f]\equiv 0.$$

2.5. НЕЗАВИСИМОСТЬ

Определение независимости. Независимость — это отсутствие как и незнание взаимных связей исходов разных явлений, отраженное в определенных свойствах совместных моделей. Мы дадим формальное определение независимости как свойств средних, а обсуждать его адекватность нашим представлениям будем в процессе изложения. Замечательно то, что вводимое нами по-

13

нятие независимости действует и для неустойчивых в статистическом смысле явлений.

Два явления, одно с исходами $\mathscr{X}$ и другое — $\mathscr{Y}$ называются независимыми (или сокращенно, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — независимы), если интервальное среднее произведений частных (разделенных по переменным) признаков равно произведениям интервальных средних, т. е. верна ф о р м у л а и н т е р в а л ь н о й м у л ь т и п л и к а т и в н о с т и с р е д н и х:

$$\overline{M}f(x)\varphi(y) = \overline{Mf(x)\,M\varphi(y)}, \quad \forall f(x),\ \varphi(y) \in \mathscr{F}^{xy}. \tag{2.8}$$

Здесь произведение средних справа раскрывается согласно правилам интервальной арифметики (§ 2.2), а именно:

$$\overline{MfM\varphi} = \max\{\overline{M}f\overline{M}\varphi,\ \overline{M}f\underline{M}\varphi,\ \underline{M}f\overline{M}\varphi,\ \underline{M}f\underline{M}\varphi\} — \tag{2.9}$$

— это максимальное число, которое может быть получено умножением чисел двух интервалов $\underline{M}f$, $\overline{M}f$ и $\underline{M}\varphi$, $\overline{M}\varphi$, причем допускаются бесконечные значения (если f принадлежит, а $-f$ не принадлежит области существования $\mathscr{F}^{xy}$). Аналогично нижнее среднее $\underline{M}f(x)\varphi(y)$ будет равно минимуму в правой части (2.9), обозначаемому $\underline{MfM\varphi}$.

При некоторых положениях интервалов на числовой оси произведения средних упрощаются (аргументы для краткости опускаются и ниже всюду f — признак на $\mathscr{X}$, φ — на $\mathscr{Y}$):

$$\underline{M}f \geqslant 0, \quad \underline{M}\varphi \geqslant 0 \Rightarrow \underline{MfM\varphi} = \underline{M}f\underline{M}\varphi,$$

$$\underline{M}f \geqslant 0, \quad \overline{M}\varphi \geqslant 0 \Rightarrow \overline{MfM\varphi} = \overline{M}f\overline{M}\varphi,$$

$$\underline{M}f \geqslant 0, \quad \overline{M}\varphi \leqslant 0 \Rightarrow \overline{MfM\varphi} = \underline{M}f\overline{M}\varphi,$$

$$\overline{M}f \geqslant 0, \quad \overline{M}\varphi \leqslant 0 \Rightarrow \underline{MfM\varphi} = \overline{M}f\underline{M}\varphi.$$

Так, для неотрицательных функций f^+ и φ^+ всегда имеет место самый первый случай и $\underline{M}f^+\mu^+ = \underline{M}f^+\underline{M}\varphi^+$, $\overline{M}f^+\varphi^+ = \overline{M}f^+\overline{M}\varphi^+$. В частности, для событий $A \subset \mathscr{X}$, $B \subset \mathscr{Y}$, подставляя их индикаторные функции $A(x)$, $B(y)$ в (2.9), получаем $\underline{P}(A, B) = \underline{P}(A)\underline{P}(B)$, $\overline{P}(A, B) = \overline{P}(A)\overline{P}(B)$.

Подчеркнем, что сами по себе эти пропорции между вероятностями не могут служить определением независимости (кроме случая точных вероятностей на дискретных пространствах), так как события — это всего лишь узкий подкласс из огромного разнообразия признаков. А независимость — емкое понятие, охватывающее все вместе признаки.

Если $\mathscr{I}^{xy}$ — голая совместная ИМ на $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$, то для всех признаков: $\underline{M}f = \inf f$, $\overline{M}f = \sup f$, и здесь нетрудно убедиться в следующем:

$$\underline{M}f\varphi = \inf f\varphi = \underline{MfM\varphi}, \quad \overline{M}f\varphi = \sup f\varphi = \overline{MfM\varphi},$$

где инфимум и супремум берутся по переменным x и y. Таким образом, *если никаких статистических данных об исходах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ нет, то явления независимы.* На первый взгляд несколько странный, но совершенно естественный, как выяснится дальше, вывод, вытекающий из общего правила: чем меньше мы знаем о явлении, чем более размытыми являются средние, тем меньше ценности несет в себе понятие независимости.

Если Mf и $M\varphi$ являются точными, то интервалы средних превращаются в точки, а интервальное произведение (2.8) в обычное: $Mf\varphi = MfM\varphi$.

Свойства независимости. Выведем свойства, позволяющие с разных сторон взглянуть на понятие независимости.

С в о й с т в о р а в н о п р а в и я. *Явления $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ равноправны по отношению к независимости: если $\mathscr{X}$ не зависит от $\mathscr{Y}$, то и $\mathscr{Y}$ не будет зависеть от $\mathscr{X}$.*

С в о й с т в о м у л ь т и п л и к а т и в н о с т и н а с е ч е н и я х. *Если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ независимы, то для Mf, $M\varphi$-сечения $\mathscr{M}^{xy}_{MfM\varphi}$ совместной модели $\mathscr{M}^{xy}$ среднее произведения $f\varphi$ частных признаков является точным и равняется произведению средних*:

$$M_{Mf,\, M\varphi} f\varphi = MfM\varphi.$$

В самом деле, согласно формуле (1.10) для сечений имеем

$$\underline{M}_{Mf,\, M\varphi} f\varphi = \min_{c_1, c_2} [\overline{M}(f\varphi - c_1 f - c_2\varphi) + c_1 Mf + c_2 M\varphi].$$

Перегруппируем выражение в квадратных скобках, записав его

$$[\overline{M}(f - c_1)(\varphi - c_2) - (Mf - c_1)(M\varphi - c_2) + MfM\varphi] =$$
$$= [\overline{M(f - c_1)\,M(\varphi - c_2)} - (Mf - c_1)(M\varphi - c_2)] + Mf\,M\varphi,$$

где использовано (2.8) и общая черта раскрывается согласно (2.9). Нетрудно теперь убедиться, что минимум квадратных скобок последнего выражения по c_1, c_2 равен 0.

Смысл доказанного свойства в том, что если бы мы вдруг узнали точно средние Mf, $M\varphi$ и добавили бы их в модель $\mathscr{M}^{xy}$ независимых $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, то получили бы привычное свойство независимых явлений: среднее произведения $f\varphi$ равно произведению средних.

С в о й с т в о н е и з м е н н о с т и у с л о в н ы х м о д е л е й. *Для независимых $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ условная модель $\mathscr{M}^{y}{}_{A}$ на $\mathscr{Y}$ при условии, что случилось событие $A \subset \mathscr{X}$, не зависит от A и равна частной*:

$$\mathscr{M}^{y}_{A} = \mathscr{M}^{y}, \quad \forall A \subset \mathscr{X}.$$

Здесь $\mathscr{M}^{y}{}_{A}$ — частная к условной совместной модели $\mathscr{M}^{xy}{}_{A}$.

В самом деле, так же как для предыдущего свойства (полагая $c_2 = 0$) доказывается для $\underline{P}(A) = MA(x)$-сечения совместной модели равенство $\overline{M}_{P(A)}A(x)\varphi(y) = P(A)\overline{M}\varphi(y)$ и далее нужно применить формулу (1.15) для условного среднего, убеждаясь в $\overline{M}_A\varphi(y) = \overline{M}\varphi(y)$.

Таким образом, если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ независимы, то какие бы наблюдения ни велись за $\mathscr{X}$ (в виде свершившихся конкретных x или нечетких событий) о частной модели на $\mathscr{Y}$, все равно ничего нового не будет известно. Аналогично будет, если пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ переставить местами (в силу свойства равноправия).

З а м е ч а н и е. Само по себе свойство неизменности условных моделей $\mathscr{M}^y{}_A$ (как их одинаковость по $A\subset\mathscr{X}$) выполняется и для случая, когда $\mathscr{Y}$ свободен от $\mathscr{X}$, т. е. $\mathscr{M}^{xy}=\mathscr{M}^x\mathscr{M}^y$, поэтому нельзя положить это свойство в основу эквивалентного определения независимости.

Следующим является с в о й с т в о а д д и т и в н о с т и. *Среднее суммы разделенных по переменным частных признаков равно сумме средних*: $\overline{M}[f(x)+\varphi(y)]=\overline{M}f(x)+\overline{M}\varphi(y)$.

В самом деле, так как прибавление постоянных равенства не меняет, то, считая $\underline{M}f>0$, $\underline{M}\varphi>0$ и используя дважды (2.8), получаем

$$\overline{M}f\overline{M}\varphi+\overline{M}f+\overline{M}\varphi+1=\overline{M}(f+1)(\varphi+1)=$$

$$=\overline{M}(f\varphi+f+\varphi+1)\leqslant\overline{M}f\varphi+\overline{M}(f+\varphi)+1=\overline{M}f\overline{M}\varphi+\overline{M}(f+\varphi)+1,$$

откуда $\overline{M}f+\overline{M}\varphi\leqslant\overline{M}(f+\varphi)$, а так как обратное неравенство есть свойство средних, то это доказывает равенство.

Характеризационным для независимости, как выяснится из дальнейшего, является с в о й с т в о в з а и м н о й н е к о в а р и и р о в а н н о с т и ч а с т н ы х п р и з н а к о в: *если $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ независимы, то нулевыми всегда будут верхние средние следующих произведений частных признаков* $f(x)$, $\varphi(y)\in\mathscr{F}^{xy}$:

$$\overline{M}(f-\underline{M}f)(\varphi-\overline{M}\varphi)=\overline{M}(f-\overline{M}f)(\varphi-\underline{M}\varphi)=$$

$$=\overline{M}(\overline{M}f-f)(\varphi-\overline{M}\varphi)=\overline{M}(\underline{M}f-f)(\varphi-\underline{M}\varphi)=0,\quad\forall f,\ \varphi.\qquad(2.10)$$

Равенства (2.10) проверяются непосредственным использованием (2.8). Например,

$$\overline{M}(f-\underline{M}f)(\varphi-\overline{M}\varphi)=\overline{M(f-\underline{M}f)M(\varphi-\overline{M}\varphi)}=$$

$$=\max\{(\overline{M}f-\underline{M}f)(\overline{M}\varphi-\overline{M}\varphi),\quad(\overline{M}f-\underline{M}f)(\underline{M}\varphi-\overline{M}\varphi),$$

$$(\underline{M}f-\underline{M}f)(\overline{M}\varphi-\overline{M}\varphi),\quad(\underline{M}f-\underline{M}f)(\underline{M}\varphi-\overline{M}\varphi)\}=0.$$

З а м е ч а н и е. В левых частях равенств (2.10) участвуют произведения в известном смысле центрированных признаков. Средние этих произведений называются *ковариациями* f и φ. Их четыре, поэтому (2.10) есть обобщение известного для точных средних свойства равенства нулю ковариации независимых случайных величин: $M(f-Mf)(\varphi-M\varphi)=0$.

Независимое произведение. В тождестве (2.8), составляющем свойство независимости, справа стоит произведение средних, определяемых по частным моделям $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$. Однако это отнюдь не означает, что частные модели $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$ полностью должны определять совместную $\mathscr{M}^{xy}$. Нет, они обязаны согласно (2.8)

определять только часть ее средних, а именно, на произведениях разделенных по переменным признаков. Ничто при этом не мешает еще знать средние $\overline{M}g(x,\ y)$ на неразделяемых признаках более точно, чем это можно было бы сделать продолжением разделенных.

Текущий раздел посвящается тому случаю, когда совместная модель $\mathscr{M}^{xy}$ однозначно определяется частными моделями независимых $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, что даст наиболее широкую совместную модель независимых $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ при фиксированных частных. Ее можно интерпретировать как отсутствие каких-либо «посторонних» взаимных средних: исследуются отдельно $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$, и при условии, что они независимы, ставится вопрос, какая совместная модель получится? Определим ее.

Совместная модель $\mathscr{M}^{xy}$, первичными для которой являются средние (2.8) всевозможных произведений частных (разделенных по переменным) признаков, называется *независимым произведением* $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$, и обозначается

$$\mathscr{M}^{xy}=\mathscr{M}^x\times\mathscr{M}^y,$$

$$\overline{M}^{xy}g(x,\ y)=(\overline{M}^x\times\overline{M}^y)\,g(x,\ y),\quad g(x,\ y)\in\mathscr{F}^{xy}.$$

Пусть частные модели заданы своими первичными средними: $\mathscr{M}^x=\langle\tilde{M}^x\mathscr{H}\rangle$, $\mathscr{M}^y=\langle\tilde{M}^y\Psi\rangle$, где $\mathscr{H}$ — набор частных признаков $h(x)$ на $\mathscr{X}$, а Ψ — признаков $\psi(y)$ на $\mathscr{Y}$. Процедура вычисления совместных средних $\overline{M}g$ для независимого произведения $\langle\tilde{M}^x\mathscr{H}\rangle\times\times\langle\tilde{M}^y\Psi\rangle$ разбивается на три этапа. Первый — это продолжение первичных средних на все частные признаки, мажорируемые конечными линейными комбинациями первичных, что дает $\overline{M}^xf(x)$, $f(x)\in\mathscr{L}^+\mathscr{H}$, и $\overline{M}^y\varphi(y)$, $\varphi(y)\in\mathscr{L}^+\Psi$. Второй — это вычисление по формуле (2.8) средних $\overline{M}f\varphi$ их произведений с учетом формулы обращения $\underline{M}^xf=-\overline{M}^x(-f)$ (если $-f\notin\mathscr{L}^+\mathscr{H}$, то считается $\underline{M}^xf=-\infty$). Средние $\overline{M}f\varphi$ будут конечными при $\pm f\in\mathscr{L}^+\mathscr{H}$ и $\pm\varphi\in\mathscr{L}^+\Psi$. Наконец, третий шаг — это по набору из всех $\overline{M}f\varphi$, первичному для совместной модели, вычисление $\overline{M}g(x,\ y)$ уже для любых g по формуле

$$\overline{M}g(x,\ y)=\inf_{c+\sum c_if_i(x)\varphi_i(y)\geqslant g(x,\ y)}[c+\sum c_i^{+}\overline{Mf_iM\varphi_i}].$$

Вытекающий из указанной многошаговой процедуры вывод состоит в том, что размерность модели, т. е. минимальное число определяющих ее первичных признаков, для независимого произведения $\mathscr{M}^x\times\mathscr{M}^y$ определяется не столько сомножителями, сколько размерами пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Если число элементов этих пространств бесконечно, то независимо от размерностей $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$ размерность их независимого произведения будет, в общем, бесконечной (за некоторым исключением, например, $\mathscr{I}^x\times\mathscr{I}^y$).

П р и м е р 2.13. Пусть $A\subset\mathscr{X}$ и $B\subset\mathscr{Y}$ есть два события и $\overline{P}(A)$, $\overline{P}(B)$ — вероятности, являющиеся первичными для своих частных моделей размерности 1 соответственно $\mathscr{M}^x = \langle \bar{P}(A) \rangle$ и $\mathscr{M}^y = \langle \bar{P}(B) \rangle$. Покажем, что независимое произведение $\mathscr{M}^x \times \mathscr{M}^y$ будет иметь, в общем, бесконечную размерность (исключаем случаи, когда $\bar{P}(A)$ или $\bar{P}(B)$ равны 0 или 1, и когда пространства дискретны). Для ограниченных f и φ (составляющих области существования частных моделей), вводя обозначения $\bar{f}(A) = \sup\limits_{x \in A} f(x)$, $\underline{f}(A) = \inf\limits_{x \in A} f(x)$ и такие же для $\overline{\varphi}(B)$, $\underline{\varphi}(B)$, имеем

$$\overline{M} f = [\bar{f}(A) - \bar{f}(A^c)]^+ \bar{P}(A) + \bar{f}(A^c),\ \overline{M}\varphi = [\overline{\varphi}(B) - \overline{\varphi}(B^c)]^+ \bar{P}(B) + \\ + \overline{\varphi}(B^c)$$

и $\underline{M}f = -\overline{M}(-f)$, то же $\underline{M}\varphi$. В частности, при $\bar{f}(A) \geqslant \bar{f}(A^c)$, $\overline{\varphi}(B) \geqslant \overline{\varphi}(B^c)$:

$$\underline{M}f = \underline{f}(A),\quad \underline{M}\varphi = \underline{\varphi}(B),\quad \overline{M}f\varphi = \max\{\overline{M}f\,\overline{M}\varphi,\ \underline{\varphi}(B)\,\overline{M}f,\\ \underline{f}(A)\,\overline{M}\varphi,\ \underline{f}(A)\,\underline{\varphi}(B)\}.$$

При $\bar{f}(A) > \underline{f}(A)$ и $\overline{\varphi}(B) > \underline{\varphi}(B)$ эти первичные средние совместной модели, как можно убедиться, не поглощают друг друга. Число их бесконечно. Здесь мы видим, что предположение независимости $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ дает дополнительную пищу относительно средних произведения $f\varphi$ любых ограниченных признаков $f(x)$, $\varphi(y)$, а не только складываемых из индикаторных признаков событий A, B и их дополнений, т. е. принимающих на них постоянные значения.

Как указывалось в начале раздела, нужно отличать независимость как свойство совместных моделей, от независимого произведения частных моделей как конкретного вида совместной модели. Для последнего справедливы дополнительные свойства.

Свойства независимого произведения:

1. *Равноправие*: $\mathscr{M}^x \times \mathscr{M}^y = \mathscr{M}^y \times \mathscr{M}^x$.
2. *Сохранение порядка*:

$$\mathscr{M}_1^x \subset \mathscr{M}_2^x,\quad \mathscr{M}_1^y \subset \mathscr{M}_2^y \Rightarrow \mathscr{M}_1^x \times \mathscr{M}_1^y \subset \mathscr{M}_2^x \times \mathscr{M}_2^y.$$

3. *Дистрибутивность относительно объединения*:

$$\left(\bigvee_v \mathscr{M}_v^x\right) \times \left(\bigvee_w \mathscr{M}_w^y\right) = \bigvee_v \bigvee_w \mathscr{M}_v^x \times \mathscr{M}_w^y.$$

В самом деле, первое свойство следует из определения независимости. Второе — из очевидного соотношения:

$$\overline{M}_1 f \leqslant \overline{M}_2 f,\quad \underline{M}_1 f \geqslant \underline{M}_2 f,\quad \overline{M}_1 \varphi \leqslant \overline{M}_2 \varphi,$$

$$\underline{M}_1 \varphi \geqslant \underline{M}_2 \varphi \Rightarrow \overline{M_1 f\, M_1 \varphi} \leqslant \overline{M_2 f\, M_2 \varphi}.$$

Наконец, третье свойство расписывается в виде элементарного равенства

$$\max\{\max_v \overline{M}_v f \max_w \overline{M}_w \varphi,\quad \max_v \overline{M}_v f \min_w \underline{M}_w \varphi,$$

$$\min_v \underline{M}_v f \max_w \overline{M}_w \varphi,\quad \min_v \underline{M}_v f \min_w \underline{M}_w\} = \max_{v,\,w} \overline{M_v f\, M_w \varphi}.$$

Если в третьем свойстве в качестве v и w взять средние $Mf(x)$, $M\varphi(y)$ и использовать представление частных моделей в виде объединения сечений, то получим

$$\mathscr{M}^x \mathscr{M}^y = \left(\bigvee_{M_* f} \mathscr{M}^x_{M_* f}\right) \times \left(\bigvee_{M_* \varphi} \mathscr{M}^y_{M_* \varphi}\right) = \bigvee_{M_* f} \bigvee_{M_* \varphi} \mathscr{M}^x_{M_* f} \times \mathscr{M}^y_{M_* \varphi}.$$

А так как $\mathscr{M}^x_{M_* f} \times \mathscr{M}^y_{M_* \varphi} = (\mathscr{M}^x \times \mathscr{M}^y)_{M_* f,\, M_* \varphi}$, то отсюда вывод: *независимость сохраняется при переходе к* $(M_* f(x), M_* \varphi(y))$*-сечениям модели, и наоборот, из независимости в сечениях* (по разделенным признакам) *следует независимость* $\mathscr{X}$ *и* $\mathscr{Y}$.

4. *Независимые произведения эквивалентным образом задаются свойством* (2.10) *некоовариированности частных признаков.*

Доказательство содержится в дополнении 1. Итак, некоовариированность (2.10) не только есть следствие независимости, но и сама, если некоовариированными являются любые пары $f(x)$, $\varphi(y)$ признаков, служит характеризацией независимого произведения, полностью его определяя.

Независимые произведения на дискретных пространствах исходов. Для дискретных явлений здесь будет дана интерпретация введенной нами независимости с позиций представлений моделей в виде семейства распределений вероятностей.

Пусть $\mathscr{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $\mathscr{Y} = \{y_1, y_2, \ldots\}$ дискретны и независимы. Если вероятности элементарных исходов являются точными, то понятие независимости исходов $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ превращается в тождественное равенство совместной вероятности (также точной) произведению частных:

$$P(x_i, y_j) \equiv P(x_i) P(y_j),\ \forall i,\ j,$$

где $P(x_i) = \sum\limits_j P(x_i, y_j)$, $P(y_j) = \sum\limits_i P(x_i\ y_j)$. Это хорошо известно, и мы им не раз уже пользовались, в векторном виде записывая: $\mathbf{P}^{xy} = \mathbf{P}^x \times \mathbf{P}^y$. А если вероятности не точные, а интервальные? Тогда соответствующие модели $\mathscr{M}^{xy}$ изображаются выпуклыми семействами векторов совместных вероятностей $\mathbf{P}^{xy}$, или, что более экономично, крайними точками, а еще лучше не всеми, а только являющимися вершинами $\mathbf{P}^{xy}{}_\theta$ модели: $\mathscr{M}^{xy} = \bigvee\limits_\theta \mathbf{P}^{xy}{}_\theta$, где θ — индекс множества этих вершин, своего рода общий для $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ фактор.

Принято считать, что независимость $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ будет достигнута, когда на произведения разбиваются если не все векторы $\mathbf{P}^{xy} \subset \mathscr{M}^{xy}$, то хотя бы вершины $\mathbf{P}^{xy}{}_\theta$, т. е. $\mathscr{M}^{xy} = \bigvee\limits_\theta \mathbf{P}^x{}_\theta \times \mathbf{P}^y{}_\theta$. Но это не так, и вот пример, показывающий, к какому заблуждению это может привести!

Пример 2.14. Пусть $\mathscr{X} = \mathscr{Y}$ и вероятности $\mathbf{P}^{xy}{}_\theta$, где фактор θ принимает значения $\theta_1, \theta_2, \ldots$, таковы, что $\mathbf{P}_{\theta_i}(x_i, y_i) = \delta_{ij}$ (0 при $i \neq j$ и 1 при $i = j$), т. е. при заданном θ_i с вероятностью 1 появляется исход x_i и обязательно тот же самый исход $y_i = x_i$ на $\mathscr{Y}$. Для каждого $\mathbf{P}^{xy}{}_{\theta_i}$, как нетрудно видеть, $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ независимы: $\mathbf{P}^{xy}{}_{\theta_i} = \mathbf{P}^x{}_{\theta_i} \times \mathbf{P}^y{}_{\theta_i}$, потому что детерминированные исходы формально независимы. Объединение $\mathscr{M}^{xy} = \bigvee\limits_{\theta_i} \mathbf{P}^x{}_{\theta_i} \times \mathbf{P}^y{}_{\theta_i}$ соответствует совместному явлению, в котором с неизвестной вероятностью выбирается какой-то исход $x_i \in \mathscr{X}$ и затем детерминированно — совпадающий с ним исход $y_i = x_i$

на $\mathscr{Y}$. Несомненно, раз y всегда совпадает с x, о независимости исходов не может быть и речи.

Что-то похожее на приведенный пример будет иметь место, если немного отклониться от точно нулевой и единичной частных вероятностей, так как и тогда представляется возможность по исходу x более или менее точно предсказать фактор θ, а через него уже исход y. Таким образом, причина дефицита независимости для модели в виде объединения $\bigvee_\theta \mathbf{P}^x{}_\theta \times \mathbf{P}^y{}_\theta$ кроется в наличии общего для x и y подчиняющего их свойства фактора θ. Для независимости нужно развязать факторы в соответствии со следующим утверждением.

На дискретных $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ совместная $\mathscr{M}^{xy}$ образует независимое произведение тогда и только тогда, когда она представляется в виде объединения произведений точных векторов вероятностей

$$\mathscr{M}^{xy} = \bigvee_v \bigvee_w \mathbf{P}_v^x \times \mathbf{P}_w^y \tag{2.11}$$

с индексами v и w, несвязанно друг от друга пробегающими свои множества V и W значений.

Условиями утверждения гарантируется $\mathscr{M}^{xy} = \mathscr{M}^x \times \mathscr{M}^y$, где $\mathscr{M}^x = \bigvee \mathbf{P}^x{}_v$, $\mathscr{M}^y = \bigvee \mathbf{P}^y{}_w$, а совместные средние вычисляются из выражения:

$$\overline{M} g(x, y) = \sup_{v \in V} \sup_{w \in W} \sum_i \sum_j g(x_i, y_j) P_v(x_i) P_w(y_j), \quad \forall g \in \mathscr{F}_0^{xy}.$$

Необходимость следует из указанного представления частных моделей в виде семейств и свойства дистрибутивности независимого умножения относительно объединений; а для доказательства достаточности нужно подставить в выражение $\overline{M} g(x, y)$ произведение $g(x, y) = f(x)\varphi(y)$ и убедиться в справедливости тождества (2.11).

Формула (2.14) может быть взята за эквивалентное определение независимого произведения, но только для дискретных пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Ее невозможно распространить на непрерывные пространства в связи с отсутствием там подобных векторам вероятностей атомов модели.

Представление (2.11) полезно потому, что придает некоторую наглядность доказательствам указанных выше свойств независимых произведений, как это демонстрируется в дополнении 2 к параграфу. А теперь — наглядный пример к данному разделу.

Пример 2.15. Если независимо два раза подбрасывается одна и та же гнутая монета, то имеем два независимых эксперимента с одинаковыми вероятностями герба $P(\Gamma_1) = P(\Gamma_2) = p$ при обоих подбрасываниях. Из-за неизвестности p: $\underline{p} \leqslant p \leqslant \overline{p}$, имеем совместную интервальную модель в виде объединения $\mathscr{M}^{\overline{xy}_*} = \bigvee_{\underline{p} \leqslant p \leqslant \overline{p}} \mathbf{P}^x \times \mathbf{P}^y$, где вероятности $\mathbf{P} = (p, 1-p)$ одинаковы на $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$. Это есть стационарный эксперимент. Здесь вероятности существуют (хотя не известны) и подчинены друг другу, что так или иначе связывает исходы между собой, потому независимости, как мы ее определили, нет.

14

Другой случай, когда каждый раз совершенно неизвестно, какая монета, гнутая или нет, подбрасывается. Это уже неустойчивый эксперимент с совершенно независимыми исходами в нашем определении, а также и понимании независимого произведения, так как по результату первого подбрасывания уже совершенно ничего нового не скажешь о втором и

$$\mathscr{M}_2^{xy} = \bigvee_{\underline{\underline{p}} \leqslant p_1 \leqslant \overline{\overline{p}}} \ \bigvee_{\underline{\underline{p}} \leqslant p_2 \leqslant \overline{\overline{p}}} \mathbf{P}_1^x \times \mathbf{P}_2^y,$$

где $\mathbf{P}_1^x = (p_1, 1 - p_1)$, $\mathbf{P}_2^y = (p_2, 1 - p_2)$. $\underline{\underline{p}} = \min\{\underline{p}, {}^1/_2\}$, $\overline{\overline{p}} = \max\{\overline{p}, {}^1/_2\}$.

Геометрическая иллюстрация независимости. Для случая двухточечных экспериментов $\mathscr{X} = \{x_1, x_2\}$, $\mathscr{Y} = \{y_1, y_2\}$ совместная модель описывается семействами векторов вероятностей $\mathbf{P} = (P(x_1, y_1), P(x_1, y_2), P(x_2, y_1))$ в трехмерном пространстве (компонента $P(x_2, y_2)$ опущена, так как дополняет до 1 сумму остальных). Обратимся к рис. 2.7, где поверхность π есть множество векторов $\mathbf{P} = \mathbf{P}^x \times \mathbf{P}^y$ независимого произведения, т. е. с $P(x_i, y_j) = P(x_i) P(y_j)$. Через эти равенства по границам интервальных вероятностей $\underline{P}(x_1)$, $\overline{P}(x_1)$ и $\underline{P}(y_1)$, $\overline{P}(y_1)$ (первая пара задает $\mathscr{M}^x$, вторая — $\mathscr{M}^y$) определяются четыре точки $\mathbf{P}_{ij}$, $i, j = 1, 2$, на π; они и будут четырьмя вершинами тетраэдра независимого произведения $\mathscr{M}^x \times \mathscr{M}^y$.

Тетраэдр эквивалентно представляется: 1) объединением вершин $\mathbf{P}_{ij}$, 2) как фигура с четырьмя располагающимися на π ребрами, соответствующими границам вероятностей, 3) как множество, окаймленное гранями, соответствующими четырем уравнениям:

$$\begin{aligned}
&\overline{M}\,[\delta_{x_1}(x) - \underline{P}(x_1)]\,[\delta_{y_1}(y) - \overline{P}(y_1)] = 0;\\
&\overline{M}\,[\delta_{x_1}(x) - \overline{P}(x_1)]\,[\delta_{y_1}(y) - \underline{P}(y_1)] = 0;\\
&\overline{M}\,[\overline{P}(x_1) - \delta_{x_1}(x)]\,[\delta_{y_1}(y) - \overline{P}(y_1)] = 0;\\
&\overline{M}\,[\underline{P}(x_1) - \delta_{x_1}(x)]\,[\delta_{y_1}(y) - \underline{P}(y_1)] = 0.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Это есть уравнения (2.10) для $f(x) = \delta_{x_1}(x)$, $\varphi(y) = \delta_{y_1}(y)$. Так как при $\mathscr{X} = \{x_1, x_2\}$ любая функция $f(x)$ линейным образом приводится к $\delta_x(x)$ (например, при $f(x_2) > f(x_1)$, $\delta_{x_1}(x) = f(x) - f(x_1))/(f(x_2) - f(x_1))$, то отсюда следует: *система (2.12) нулевых средних, соответствующая нековариированности элементарных исходов, дает необходимые и достаточные условия независимости двухточечных экспериментов $\mathscr{X} = \{x_1, x_2\}$ и $\mathscr{Y} = \{y_1, y_2\}$.*

Условия нековариированности (2.12) достаточны для независимости, но не для независимого произведения. В самом деле, если на рис. 2.7 введением дополнительного первичного значения, скажем $\overline{p}(x_1, y_1)$ «отрезать» угол тетраэдра, не исказив первичных граней, то хотя равенства (2.12) выполняются, но независимого произведения уже не будет.

Сделаем выводы. Первый: любые «урезания» тетраэдра независимого произведения $\mathscr{M}^{xy}$ на рис. 2.7, при которых остаются

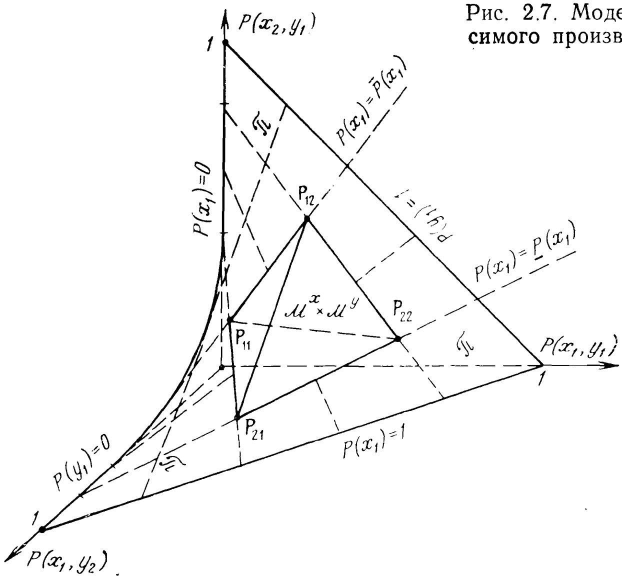


Рис. 2.7. Модель независимого произведения

хотя бы какие-нибудь части каждой из его граней, сохраняют независимость $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$, но нарушают независимое произведение. Таким «урезанием» можно учитывать дополнительные свойства экспериментов. Например, их стационарность как результат одинаковости условий проистекания (см. первую часть примера 2.15), которая в самом общем случае отражается дополнительными ограничивающими модель равенствами $M[f(x)-f(y)]\equiv 0$, $\forall f\in\mathscr{F}$ (об этом пойдет речь в следующих двух главах).

Второй: независимость есть некоторая пропорциональность размеров и особенность положения тела совместной модели по отношению к координатным осям, а независимое произведение — вместе с этим полагает и минимальное число граней модели.

Третий: любую совместную модель $\mathscr{M}^{xy}$ можно расширить до такой, при которой $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ становятся независимыми, или же расширить до содержащего ее независимого произведения: $\mathscr{M}^{xy}\subset\mathscr{M}_*{}^x\times\mathscr{M}_*{}^y$. Отметим, что справа $\mathscr{M}_*{}^x$ и $\mathscr{M}_*{}^y$ оказываются, в общем, шире частных $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$ для $\mathscr{M}^{xy}$, и расширение не однозначно.

И, наконец, четвертый: наличие общего для $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ подчиняющего параметра θ угрожает потерей независимости и соответствует модели $\bigvee\limits_{\theta}\mathbf{P}^x{}_\theta\times\mathbf{P}^y{}_\theta$, все вершины которой лежат на поверхности π (рис. 2.7).

Нековариированность случайных величин. Следствием независимости было выполнение для всех частных, разделенных по переменным признаков $f(x)$ и $\varphi(y)$ равенств (2.10), определяющих нековариированность f и φ. Изучим это понятие подробнее, считая f и φ произвольными совместными признаками, для чего в

(2.10) подставляются: $f=f_1(x,\ y)$, $\varphi=f_2(x,\ y)$ — на $\mathscr{X}\times\mathscr{Y}$ это случайные величины. Случайные величины f_1 и f_2 нековариированы, если их ковариации, определяемые левыми частями равенств (2.10), равны 0. Нековариированность — это свойство совместной модели. Для него верно следующее.

1. Понятие нековариированности равноправно относительно случайных величин.

2. Если f_1 и f_2 нековариированы, то такими же останутся вторичные поэлементные признаки $f'_1=b_1f_1+c_1$ и $f'_2=b_2f_2+c_2$, $\forall b_1$, b_2, c_1, $c_2\in\mathscr{R}$, (обозначаем их множества через $\mathscr{L}f_1$ и $\mathscr{L}f_2$).

3. Признаки f_1 и f_2 будут нековариированными, если и только если выполняется любое из следующих двух условий:

Условие А

$$\left.\begin{aligned}&\overline{M}(f_1-c)(f_2-\overline{M}f_2)=0\\&\overline{M}(c-f_1)(f_2-\underline{M}f_2)=0\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad\forall c\leqslant\underline{M}f_1;$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{M}(f_1-\overline{M}f_1)(f_2-d)=0\\&\overline{M}(f_1-\underline{M}f_1)(d-f_2)=0\end{aligned}\right\}\quad\text{при}\quad\forall d\leqslant\underline{M}f_2.$$

Условие Б

$$\overline{M}f'_1(f'_2-\overline{M}f'_2)=0\qquad\text{при всех } f'_2\in\mathscr{L}f_2 \text{ и } f'_1\in\mathscr{L}f_1 \text{ таких, что } \underline{M}f'_1\geqslant 0;$$

$$\overline{M}(f'_1-\overline{M}f'_1)f'_2=0\qquad\text{при всех } f'_1\in\mathscr{L}f_1 \text{ и } f'_2\in\mathscr{L}f_2 \text{ таких, что } \underline{M}f'_2\geqslant 0.$$

4. Для голой совместной ИМ любые ограниченные признаки попарно нековариированы.

5. При точных средних Mf_1 и Mf_2 понятие нековариированности трансформируется в равенство $M(f_1-Mf_1)(f_2-Mf_2)=0$, а если к тому же $Mf_1=0$ или $Mf_2=0$, то совпадает с понятием *некоррелированности*: $Mf_1f_2=0$.

Классы $\mathscr{H}$ и Ψ признаков называются *нековариированными*, если любой признак $h\in\mathscr{H}$ нековариирован с любым $\psi\in\Psi$. Из свойства 2 совершенно ясно, что нековариированными будут и любые $h'\in\mathscr{L}h$ с $\psi'\in\mathscr{L}\psi$.

Независимость, свобода, нековариированность. Пусть $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — два явления. Если считать частные модели $\mathscr{M}^x=\langle\overline{M}^x\mathscr{H}\rangle$, $\mathscr{M}^y=\langle\overline{M}^y\Psi\rangle$ заданными их согласованными средними на первичных признаках $h(x)\in\mathscr{H}$, $\psi(y)\in\Psi$, то каждое из составляющих заголовок понятий соответствует определенной статистической связи как между первичными $h(x)$ и $\psi(y)$, так и между произвольными всеми остальными признаками вида $f(x)$ и $\varphi(y)$. Эта связь плюс частные модели вместе формируют совместную модель.

Систематизируя изложенные выше результаты, укажем, какие в итоге совместные модели получаются и какими наборами первичных средних они определяются.

Независимость $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$: $\mathscr{M}^{xy}_{\text{нз}}=\mathscr{M}^x\times\mathscr{M}^y$,

$$\overline{M}_{\text{нз}} f(x)\varphi(y)=\overline{\overline{M}f\overline{M}\varphi},\quad \forall f,\ \varphi.$$

Свобода $\mathscr{Y}$ от $\mathscr{X}$: $\mathscr{M}^{xy}_{\text{св}}=\mathscr{M}^x\mathscr{M}^y$, $\overline{M}_{\text{св}}f(x,\ y)=\overline{M}^x(\overline{M}^y f(x,\ y))$,

$$\overline{M}\,\mathscr{H}\cup\{\overline{M}c^+(x)[\psi(y)-\overline{M}\,\psi],\ \psi\in\Psi\}.$$

Нековариированность $\mathscr{H}$ и Ψ: $\mathscr{M}^{xy}{}_{\text{нк}}$,

$$\overline{M}_{\text{нк}}(h-\underline{M}h)(\psi-\overline{M}\psi)=\overline{M}_{\text{нк}}(h-\overline{M}h)(\psi-\underline{M}\,\psi)=$$

$$=\overline{M}_{\text{нк}}(\overline{M}h-h)(\psi-\overline{M}\,\psi)=\overline{M}_{\text{нк}}(\underline{M}h-h)(\psi-\underline{M}\,\psi)=0,$$

$$\forall h\in\mathscr{H},\quad \psi\in\Psi.$$

Отсюда видно, что при одних и тех же частных моделях для независимого произведения количество первичных признаков существенно богаче, чем для свободного и чем при нековариированности, а так как средние на всех те же самые, то

$$\mathscr{M}_{\text{нз}}\subset\mathscr{M}_{\text{св}},\quad \mathscr{M}_{\text{нз}}\subset\mathscr{M}_{\text{нк}}.$$

Равенство будет лишь при точных векторах вероятностей в дискретных пространствах.

Что касается понятий свободы и нековариированности, то они, в общем, не сравнимы по включению между собой, так как $\mathscr{M}_{\text{св}}$ и $\mathscr{M}_{\text{нк}}$ задаются разными первичными признаками. В определенных классах моделей такая связь все же обнаруживается, как в следующем примере точных (на алгебрах) распределений вероятностей, важном также для осмысливания статуса принятого в современной литературе понятия независимости, которое в нашей терминологии оказывается ничем иным, как нековариированностью алгебр.

Пример 2.16. Алгебры $\mathscr{A}^x{}_0$ на $\mathscr{B}^y{}_0$ и $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$ называются нековариированными относительно точной на их произведении совместной модели $\mathscr{M}^{xy}=\mathscr{P}^x\times\mathscr{P}^y$, если $P(AB)=P(A)P(B)$ для любых $A\in\mathscr{A}^x{}_0$ и $B\in\mathscr{B}^y{}_0$. Совместную модель, для которой эти вероятности являются первичными, обозначим $\mathscr{M}_{\text{нк}}$. Для нее нековариированными будут любые интегрируемые (по $\mathscr{P}^x$ и $\mathscr{P}^y$) частные признаки $h(x)$ и $\psi(y)$: $M_{\text{нк}}h\psi=MhM\psi$, к которым относятся любые измеримые ограниченные функции, и эти значения можно считать первичными (что не меняет $\mathscr{M}_{\text{нк}}$).

Для произведений неизмеримых признаков $f(x)\varphi(y)$ продолжением с точных средних значений измеримых признаков $Mh\psi=MhM\psi$ находим:

$$\overline{M}_{\text{нк}} f(x)\varphi(y)=\inf_{\Sigma h_i(x)\psi_i(y)\geqslant f(x)\varphi(y)}\sum Mh_i(x)M\psi_i(y),$$

где инфимум берется по всем измеримым h_i и ψ_i.

Пусть теперь при тех же частных $\mathscr{P}^x$ и $\mathscr{P}^y$, определенных точными на своих алгебрах вероятностями, явления считаются независимыми. Тогда для $\mathscr{M}_{\text{нз}}=\mathscr{P}^x\times\mathscr{P}^y$ имеем для неизмеримых признаков

$$\overline{M}_{\text{нз}} f(x)\varphi(y)=\overline{\overline{M}f(x)\,\overline{M}\varphi(y)}.$$

Разлагая $f=f^+-f^-$, $\varphi=\varphi^+-\varphi^-$ и считая $\{f\geqslant 0\}\in\mathscr{A}^x{}_0$, $\{\varphi\geqslant 0\}\in\mathscr{B}^y{}_0$, получим

$$\overline{M}_{\text{нк}} f\varphi=\overline{M}f^+\overline{M}\varphi^+-\underline{M}f^-\underline{M}\varphi^+-\underline{M}f^+\underline{M}\varphi^-+\overline{M}f^-\overline{M}\varphi^-,$$

$$\overline{M}_{\text{нз}} f\varphi=\max\{(\overline{M}f^+-\underline{M}f^-)(\overline{M}\varphi^+-\underline{M}\varphi^-),\quad(\overline{M}f^+-\underline{M}f^-)\times$$

$$\times(\underline{M}\varphi^+-\overline{M}\varphi^-),\ (\underline{M}f^+-\overline{M}f^-)(\overline{M}\varphi^+-\underline{M}\varphi^-),\ (\underline{M}f^+-\overline{M}f^-)(\underline{M}\varphi^+-\overline{M}\varphi^-)\}.$$

Нетрудно видеть, что $\overline{M}_{\text{нз}}f\varphi\leqslant\overline{M}_{\text{нк}}f\varphi$. Это неравенство справедливо для произведений любых частных ограниченных признаков $f(x)$, $\varphi(y)$. Равенство будет в том случае, если оба признака неотрицательны (в том числе, для событий):

$$\underline{M}_{\text{нз}} f^+\varphi^+=\underline{M}_{\text{нк}} f^+\varphi^+=\underline{M}f^+\underline{M}\varphi^+,$$

где равенства справедливы отдельно для верхних и для нижних средних. Таким образом, и при точных вероятностях независимость в нашем определении является более строгим понятием, чем нековариированность алгебр.

Рассмотрим при тех же частных $\mathscr{P}^x$ и $\mathscr{P}^y$ понятие свободы $\mathscr{Y}$ от $\mathscr{X}$. Обозначим $\mathscr{M}_{\text{св}}=\mathscr{P}^x\mathscr{P}^y$. Для произведений измеримых (суммируемых) частных признаков имеем те же точные средние, что при нековариированности и независимости: $M_{\text{св}}h(x)\psi(y)=Mh(x)M\psi(y)$. При неизмеримых функциях и том же условии $\{f\geqslant 0\}\in\mathscr{A}^x{}_0$, $\{\varphi\geqslant 0\}\in\mathscr{B}^y{}_0$ получим

$$\overline{M}_{\text{св}} f\varphi=\overline{M}f^+(\overline{M}\varphi^+-\underline{M}\varphi^-)-\underline{M}f^-(\underline{M}\varphi^+-\overline{M}\varphi^-)=$$

$$=\overline{M}f^+\overline{M}\varphi^+-\overline{M}f^+\underline{M}\varphi^--\underline{M}f^-\underline{M}\varphi^++\underline{M}f^-\overline{M}\varphi^+.$$

Сравнение с предыдущими формулами ведет к неравенствам

$$\overline{M}_{\text{нз}} f\varphi\leqslant\overline{M}_{\text{св}} f\varphi\leqslant\overline{M}_{\text{нк}} f\varphi.$$

Так что в данном примере $\mathscr{M}_{\text{нз}}\subset\mathscr{M}_{\text{св}}\subset\mathscr{M}_{\text{нк}}$. Таким образом, при нековариированных алгебрах и точных вероятностях на них категория свободы занимает промежуточное положение между независимостью и нековариированностью.

Дополнения. 1. Теорема. *Для того чтобы модель $\mathscr{M}^{xy}$ представляла собой независимое произведение, необходимо и достаточно, чтобы первичными для нее были совместные произведения всевозможных частных нековариированных между собой признаков $f(x)$ и $\varphi(y)$.*

Необходимость эквивалентна свойству (2.10).

Достаточность. Обозначим $\mathscr{M}'$ ИМ с первичным набором (2.10) и заданными частными $\mathscr{M}^x$ и $\mathscr{M}^y$. Покажем, что $\mathscr{M}'=\mathscr{M}^x\times\mathscr{M}^y$. Согласно формуле (1.3)

$$\overline{M}'f\varphi=\inf_{c_i^+}\sup_{x,\,y}[f(x)\varphi(y)-\sum c^+\mathring{g}_i(x,\ y)],$$

где $\mathring{g}_i(x,\ y)$ есть всевозможные первичные признаки вида

$$(f-\underline{M}f)(\varphi-\overline{M}\varphi),\ (f-\overline{M}f)(\varphi-\underline{M}\varphi),\ (\overline{M}f-f)(\varphi-\overline{M}\varphi),$$

$$(\underline{M}f-f)(\varphi-\underline{M}\varphi).$$

Так как этот набор есть часть набора (2.8), то $\mathscr{M}'\supset\mathscr{M}^x\times\mathscr{M}^y$ и потому $\overline{M}'f\varphi\geqslant\leqslant\overline{\overline{M}f\overline{M}\varphi}$. Осталось доказать противоположное неравенство. Возьмем два частных признака $f(x)$ и $\varphi(y)$ с конечными $\underline{f}=\inf f$, $\overline{f}=\sup f$ и то же $\underline{\varphi}$, $\overline{\varphi}$. Нормируем их, положив $f_0=(f-\underline{f})/(\overline{f}-\underline{f})$, $\varphi_0=(\varphi-\underline{\varphi})/(\overline{\varphi}-\underline{\varphi})$. Обозначаем $\mathscr{M}''$ — ИМ размерности четыре, определяемую некоаариированными f_0 и φ_0, т. е. первичными средними (2.10) с подставленными $f=f_0$ и $\varphi=\varphi_0$. Так как $\mathscr{M}''\supset\mathscr{M}'$, то

$$\overline{M}' f\varphi \leqslant \overline{M}'' f\varphi = \inf_{c_i^+} \max_{x,\,y} [f\varphi - c_1^+ (f_0 - \underline{M}f_0)(\varphi_0 - \overline{M}\varphi_0) -$$

$$- c_2^+ (f_0 - \overline{M}f_0)(\varphi_0 - \underline{M}\varphi_0) + c_3^+ (f_0 - \overline{M}f_0)(\varphi_0 - \overline{M}\varphi_0) +$$

$$+ c_4^+ (f_0 - \underline{M}f_0)(\varphi_0 - \underline{M}\varphi_0)].$$

Нетрудно убедиться в том, что в правой части этого неравенства максимум по x и y квадратных скобок будет достигаться при тех x^* и y^*, при которых f и φ (f_0 и φ_0) принимают экстремальные значения. Пусть f_0, φ_0 максимальны (и равны 1) при $x=x^*_1$, $y=y^*_1$ и минимальны (равны 0) при $x=x^*_2$, $y=y^*_2$. Заменяя $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ на двухточечные пространства $\mathscr{X}^*=\{x^*_1,\ x^*_2\}$, $\mathscr{Y}^*=\{y^*_1, y^*_2\}$ при тех же границах $\overline{M}^{x^*}f_0=\overline{M}f_0$, $\underline{M}^{x^*}f_0=\underline{M}f_0$, $\overline{M}^{y^*}\varphi_0=\overline{M}\varphi_0$, $\underline{M}^{y^*}\varphi_0=\underline{M}\varphi_0$, мы не изменим $\overline{M}''f\varphi=\overline{M}^{x^*y^*}f\varphi$. А для двухточечных пространств согласно следующему за (2.12) выделенному курсивом утверждению имеем $\overline{M}^{x^*y^*}f\varphi=\overline{M^{x^*}fM^{y^*}\varphi}=\overline{MfM\varphi}$, поэтому $\overline{M}'f\varphi\leqslant\overline{MfM\varphi}$, что и требовалось доказать.

2. Пример использования представления (2.11) в случае дискретных пространств $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ для доказательства свойств аддитивности и нековариированности частных признаков $f(x)$, $\varphi(y)$:

$$\overline{M}(f+\varphi) = \sup_v \sup_w (M_v f + M_w \varphi) = \sup_v M_v f + \sup_w M_w \varphi = \overline{M}f + \overline{M}\varphi;$$

$$\overline{M}(f-\underline{M}f)(\varphi-\overline{M}\varphi) = \sup_v \sup_w (M_v f - \underline{M}f)(M_w\varphi - \overline{M}\varphi) =$$

$$= (\overline{M}f - \underline{M}f)(\overline{M}\varphi - \overline{M}\varphi) = 0.$$

3. Пример соотношения понятий независимости и свободы. Вернемся к примеру 2.12. Сначала подбрасывается симметричная монета (эксперимент $\mathscr{X}$), затем «некто», зная результат подбрасывания, показывает одну из сторон своей монеты, делая это, как он хочет (эксперимент $\mathscr{Y}$). Игра идет на деньги, причем «некто» ничего с этого не получает. Если «некто» нейтрален, т. е. он может и не учитывать результат первого бросания, то эксперименты $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ будут независимыми. Если же о намерениях этого «некто» ничего не известно, то эксперимент $\mathscr{Y}$ свободен от $\mathscr{X}$. Например, «некто» может захотеть обеспечить выигрыш одному из игроков или же выравнять выигрыши. Обозначим A — выпадение первого герба и B — показ второго. По условию задачи $\underline{P}(A)=\overline{P}(A)=1/2$, а так как «некто» может избрать любую стратегию, например, показывая только гербы или только решки, то $\underline{P}(B)=0$, $\overline{P}(B)=1$. Для свободного произведения первичными совместной ИМ будут $\underline{P}(A)=\overline{P}(A)=1/2$ (средние $\overline{M}(c^+_1A+c^+A^c)(B-\overline{P}(B)=0$ избыточны, так как $B-\overline{P}(B)=B-1\leqslant 0$), а для независимого произведения —

$$\overline{M}(1/2-A)B = \overline{M}(1/2-A)B^c = \underline{M}(1/2-A)B = \overline{M}(1/2-A)B^c = 0.$$

Равенства ведут к точным значениям средних $M(1/2-A)B=M(1/2-A)B^c=0$ или равенствам $P(AB)=P(AB^c)$, $P(AB^c)=P(A^cB^c)$, которые вместе с первичными $P(AB)+P(AB^c)=1/2=P(A^cB)+P(A^cB^c)$ определяют все включенные в

независимое произведение векторы вероятностей. Отметим, что данный эксперимент отличается от двухкратного независимого подбрасывания монеты, при котором все четыре компоненты вектора вероятностей равны 1/4.

2.6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В § 2.1 изучается воздействие преобразований пространств исходов одного в другое на вид интервальной модели. Всем известны формулы преобразований плотностей и насколько сложными они становятся для нелинейных и инерционных преобразований (достаточно вспомнить расчеты системы фильтр-ограничитель-фильтр). Для интервальных моделей принципы расчета гораздо проще и универсальнее. Среди огромного разнообразия признаков всегда найдутся согласованные с преобразованием, называемые представимыми признаками, которые, во-первых, совершенно элементарно преобразуются сами, и во-вторых, для них производится непосредственный перенос средних со входа на выход, определяя, таким образом, первичные данные выходной модели. Нужно только рассчитать средние представимых признаков на входе.

Процедура расчета упростится, если первичные признаки на входе все представимы и согласованы, тогда действиями будет прямой перенос средних со входа на выход, а модели оказываются подобными. Подобие означает схожесть структур и отсутствие невозвратимого ущерба при преобразовании. В частности, подобны между собой все плотности распределений вероятностей, так как переходят одна в другую при преобразованиях случайных величин.

Случайные преобразования § 2.2 как математическая запись расплывчатых, неопределенных действий даются интервальными моделями выходного явления при каждом значении входа и называются переходными моделями. Случайность преобразований добавляет неопределенности на выходе, приводя к расслоению признаков и расширению средних. Их частный случай ведет к интервальным действиям арифметики, заложенным в интервальном анализе.

Случайное преобразование наглядно сравнивается с взволнованным аквариумом полупрозрачной неоднородной жидкости, сквозь которую мы смотрим из комнаты на улицу. Предметы становятся искаженными, нечеткими, трудноразличимыми. Уже видим не дерево и машину, а их смутные случайные очертания, по которым рисуются усредненные изображения. Это и будут нечеткие наблюдения § 2.3 как результат расплывчатых случайных[1] преобразований, где вход составляет недоступная нам некоторая предметная область (улица), а выход — наблюдения, связываемые в суждения о том, что происходит. Кстати, в человеческом языке слова и фразы также имеют предметный смысл и относятся к предметной области по принципу: мы так привыкли понимать, т. е. среднестатистически. В этом ракурсе человек являет собой разновидность случайного преобразования входа (о чем мы говорим) в выход (что мы говорим).

На интервальные средние можно смотреть как на преобразования чисел в интервалы, т. е. как своеобразный итог «видения» точных средних (если таковые существуют) через призму ограниченного эксперимента, вынуждающего прибегать к осторожным оценкам в виде интервалов. Если посмотреть

[1] Именно случайных с заложенными в них статистическим закономерностями в отличие от теории нечетких множеств Заде [15].

чуть пристальнее, то это уже будут не интервалы, а их расплывчатые аналоги, дающие размытые изображения средних. Определенные для всех признаков, они составляют размытую модель (как пример размытых преобразований в конце § 2.3 строится размытая арифметика). Этим сделан четвертый шаг на пути от детерминизма к случайности в их следующей цепи: 1) детерминированные явления, 2) случайные явления, заданные распределениями вероятностей, 3) заданные интервальными моделями, 4) заданные размытыми моделями. Дальше дороги, вроде бы, не видно.

Не только преобразования способны отразить совместное поведение двух случайных явлений. Более широко и полно это делают совместные модели § 2.4, которые задаются первичными средними совместных признаков обоих явлений и продолжаются на все остальные. Средние частных признаков вместе образуют частные модели со своей структурой первичных данных (теорема 2.1).

Не всякие модели, увы, могут рассматриваться как результаты каких-нибудь преобразований, а лишь подкласс моделей, названных разложимыми. Разложимые модели записываются как произведения частных моделей на переходные. Особый случай, когда переходные модели от входа не зависят, ведет к понятию свободы выхода от входа, как будто кто-то своевольно распоряжается выходом в рамках модели, зная вход, учитывать который или нет — его дело.

Независимость есть неведение ничего дополнительного об одном явлении, если стал известен результат другого, и наоборот. Свойство симметричное. Независимость как объективная и субъективная реальность охватывает явления целиком со всеми их признаками и через средние признаков определяется в § 2.5. Широта этого понятия оказывается зависящей от данных о явлениях. Если даны точные значения вероятностей (средних), то независимость сводится к свойству мультипликативности, а для интервальных значений — к интервальному аналогу этого свойства. А если совсем не известны, то... независимость имеет место всегда ! Разве это не следует из смысла понятия? И интересен отсюда следующий вывод, что независимость может достигаться расширением совместной модели (по сути, забыванием связей). Чтобы вывод не показался чересчур странным, напомним, что модель — это всего лишь зеркало явления, отражатель его сторон-свойств в своих образах и на своем языке, поэтому и независимость проявляется в определенной заорганизованности совместной модели, особенностях ее структуры, которых можно достичь расширением модели.

Сказанное относится к понятиям некоррелированности и нековариированности в их интервальных определениях. Это более слабые свойства по сравнению с независимостью, т. е. соответствуют более широкой совместной модели. Связь между ними разбирается в последнем разделе главы. Нужно сказать, что классическое определение независимости как мультипликативности точных вероятностей на алгебрах событий есть в наших терминах всего лишь нековариированность алгебр, а это несколько слабее истинной независимости.