Глава 1.
ОПИСАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ЯВЛЕНИЙ

1.1. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И СРЕДНИЕ

Пространство исходов. Мы живем в мире случайностей, в окружении непредвиденных действий и непредсказуемых до конца фактов. Корни случайностей разнообразны, они берут начало и от физических эффектов типа дробового шума, и от невозможности абсолютного предугадания течения процесса или поведения живого организма (в частности, индивида), и от нашего незнания (или нежелания знать) результата предстоящего (прошедшего) эксперимента и т. д. И как следствие, оказывается, что что-то может произойти, а может и нет, случиться или не случиться, быть или не быть. Эта неясность охватывается категорией случайности. Наша цель — ее описать.

Формально под *случайным явлением* понимается совокупность взаимно исключающих друг друга исходов, называемых *элементарными*, один из которых обязан произойти, но неизвестно какой.

Например, если бросается монета один раз, результатом будет герб Г (орел) или решка Р; если два раза, то элементарных исходов будет либо три (два герба ГГ, две решки РР и разной значимости), либо четыре (при разной значимости учитывается порядок следования ГР или РГ), как мы этого захотим. При бросании точки на числовую прямую $\mathscr{R}$ результатом будет число (случайная величина), а для случайного процесса, пусть шума, — реализация $x(t)$ как функция времени t.

Совокупность всех элементарных исходов формально есть некоторое абстрактное множество $\mathscr{X}$, называемое *пространством элементарных исходов*, тогда как любой из элементарных исходов — это точка x этого пространства, т. е. $x \in \mathscr{X}$. Вообще подмножество $\mathscr{X}$, обозначаемое заглавной буквой $A \subset \mathscr{X}$, называется *случайным событием*; оно произойдет, если выпадет любой входящий в него элементарный исход x.

Замечания. 1. Данное нами определение совпадает с классическим в плане введения пространства элементарных исходов $\mathscr{X}$, но не связывает случайность с вероятностями, и в этом смысле шире.

2. Может показаться, что введением пространства $\mathscr{X}$ и привязкой к нему мы как-то сузили класс охватываемых случайностей. На самом деле, пространство $\mathscr{X}$ есть элемент создаваемой нами математической модели, находится в наших руках и его можно делать сколь хотим широким, включая мыслимые и даже немыслимые исходы, если только это представляется удобным. Например (как это часто предлагают студенты), при бросании

монеты можно дополнительно включить исход, что монета встанет на ребро или что выигрыш в игре будет равен бесконечности: $\infty \in \mathscr{X}$. Можно вообще говорить о пространстве всего того, что может быть и не быть, но вряд ли это придаст описаниям экономность.

3. Элементарные исходы — не есть обязательно физическая реальность, так как появляться могут, например, нечеткие события (о которых пойдет речь чуть ниже). И тем не менее явление в нашем определении будет случайным, если хоть какое-то пространство $\mathscr{X}$ с абстрактными элементами удается с ним связать, что, как правило, возможно.

4. Детерминированные явления есть частный подкласс случайных, когда пространство элементарных исходов содержит всего один элемент.

Признаки явления. Любые измерения в своей сути есть перевод качественных показателей в количественные с представлением в числовой форме. Таким образом, в виде числа или набора чисел удобно характеризовать результаты случайного явления, отвлекаясь от конкретного содержания элементарных исходов и событий (которые в описательном смысле могут быть весьма сложными). Для этого достаточно иметь число $f(x)$ вместо каждого элементарного исхода x, т. е. поставить в соответствие $x \to f(x)$, $x \in \mathscr{X}$. Числовая функция $f(x)$ на пространстве элементарных исходов называется количественным признаком, или просто *признаком* случайного явления; обозначается сокращенно f; строго говоря, это отображение $\mathscr{X}$ в числовую прямую $\mathscr{R}$: $\mathscr{X} \xrightarrow{f} \mathscr{R}$.

Примеры признаков: f — число гербов при двух бросаниях монеты $f(\text{РР})=0$, $f(\text{РГ})=f(\text{ГР})=1$, $f(\text{ГГ})=2$. Еще пример — случайный выигрыш в азартной игре, исходами которой могут быть довольно сложные комбинации условий, а f — число денег.

Разнообразных признаков сколь угодно много: столько, сколько возможно придумать различных функций $f(x)$. Признаки f вместе с $\mathscr{X}$ играют фундаментальную роль для всего дальнейшего изложения, потому что с их помощью можно описать очень многое, если не сказать все. В частности, любые события, предикаты, высказывания, связанные с явлением. В самом деле, элементарный исход x_1 тождественно описывается *дельта-признаком* $\delta_{x_1}(x)$, равным 1 при $x=x_1$ и 0 при $x \neq x_1$; а подмножество $A \subset \mathscr{X}$ (событие A) — признаком в виде индикаторной функции, обозначаемой $A(x)$ и равной 1 при $x \in A$ и 0 при $x \notin A$. Будем называть $A(x)$ *индикаторным признаком* события A; два разных значения 1 или 0 этого признака указывают, принадлежит ли это x к A или нет, и только (рис. 1.1).

Более общим является понятие нечеткого события с не столь категоричным заявлением о принадлежности к нему. Функцию $q(x)$, заключенную между 0 и 1: $0 \leqslant q(x) \leqslant 1$, $x \in \mathscr{X}$, будем называть *признаком нечеткого события*. Так как своего описания на языке случайного явления нечеткое событие может и не иметь, то

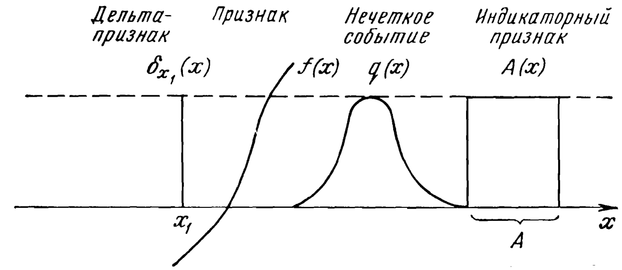


Рис. 1.1. Признаки, события

$q(x)$, заключенную между 0 и 1: $0 \leqslant q(x) \leqslant 1$, $x \in \mathscr{X}$, будем называть просто нечетким событием. Значение $q(x)=1$ говорит, что x достоверно входит в событие q, значение $q(x)=0$ — не входит, а $q(x)=1/2$ равносильно балансу уверенности и сомнения: входит или не входит. Другие промежуточные между 0 и 1 значения $q(x)$ отдают предпочтение либо уверенности, что входит (при $q(x)>1/2$), либо сомнению.

Итак, каждое событие отождествляется с эквивалентным признаком, а всем событиям соответствует подкласс признаков — это все функции со значениями от 0 до 1. Интересно и важно то, что логике высказываний, по правилам которой из одних событий логически образуются другие, соответствуют вполне определенные арифметические действия между признаками: «не q»$\Leftrightarrow 1-q(x)$; «q_1 и q_2»$\Leftrightarrow q_1(x)\,q_2(x)$; «$q_1$ или q_2»$\Leftrightarrow \min\{1,\ q_1(x)+q_2(x)\}$.

Признаками описываются не только события, но и многие другие характеристики случайного явления, например, мощность, эффективное значение и т. д. Любое преобразование признаков: сложение, умножение и т. д. — ведет к новому признаку. Таким образом, всевозможные признаки вместе с привычными действиями между ними как действительными функциями переменной x дают универсальный аппарат описания всего того, что связано так или иначе с результатами случайного явления или может быть получено из них с помощью логических, арифметических и аналитических действий.

Если $g(x) \geqslant f(x)$, $\forall x \in \mathscr{X}$, то будем говорить, что признак g *мажорирует* признак f и писать $g \geqslant f$. Это означает, что какой бы исход не случился, признак g примет значение, не меньшее признака f. Не о любых двух выбранных признаках можно вынести такое суждение, что соответствует частичной их упорядоченности.

Средние значения признаков. Выделим отдельный признак f и рассмотрим, какие сведения могут иметься о нем априори (полагая, что явление еще не произошло или результат его не известен). Первое — это область возможных значений, определяемая видом $f(x)$. Областью значений может быть дискретный набор чисел, например для индикаторных признаков $A(x)$ это 0 или 1. Это может быть отрезок числовой прямой $[\min f,\ \max f]$ от минимального $\min\limits_x f(x)$ до максимального $\max\limits_x f(x)$ значения f. Для общности, учитывая, что минимум и максимум не всегда достигаются, заменяем их на инфимум и супремум: $[\inf f, \sup f]$.

Второе — это данные о среднестатистических свойствах признака f. А именно, ожидаемое в среднем его значение Mf (здесь M от слова MEAN — средний), называемое *точным средним признака* f.

Как оно получается? Самое простое — на основании симметрии эксперимента. Например, игроки, скажем, в «орел — решку» хорошо понимают, что при равных ставках шансы на выигрыш и проигрыш одинаковы, т. е. в среднем они будут иметь ноль. В далекой древности бросали астрагалы — кости конечностей животных — и для обеспечения «равных шансов» каждый раз партнеры менялись местами.

Точные сведения могут находиться изучением внутренних механизмов явления, его природы, как это делается в статистической физике. Возможна оценка среднего по результатам предварительного опроса, проведением наблюдений, искусственно созданного обучающего эксперимента, испытаний. Если испытания независимы и проводятся в одинаковых условиях, то среднее будет пределом среднего арифметического наблюдаемых значений признака при неограниченном увеличении числа испытаний.

Наконец, просто по опыту, под которым понимается совокупность прямых и косвенных сведений о явлении, можно примерно знать, что ожидается в среднем. В самом деле, каждый из нас догадывается, сколько в среднем он потратит времени на дорогу к месту работы или в другое место, каков средний ожидаемый доход от намечаемого дела или расход от туристической поездки и т. д.

Частным случаем такого точного среднего, когда $f(x) = A(x)$ — индикаторный признак события A, является вероятность, обозначаемая $P(A) = MA(x)$ (P от слова PROBABILITY). *Вероятность* — это среднее ожидаемое число появлений A при независимых повторных испытаниях, деленное на число испытаний.

Ключевым во всех предыдущих рассуждениях является то, что в строгом смысле точные средние (и вероятности) — это параметры статистически устойчивого явления и достигаются они усреднением при неограниченном повторении того же самого явления в независимых и устойчивых условиях. Так как организовать устойчивое повторение подчас затруднительно, а неограниченное число раз просто невозможно, то часто подразумевается мыслимый или умозрительный повтор. Но чтобы «проиграть» явление сколько-то раз, проделав это в уме или с помощью ЭВМ, нужно более или менее точно знать физическую модель явления, его природу. Так, и в случае симметричной монеты, ее не обязательно подбрасывать, поскольку итак ясно, что в среднем число орлов должно равняться числу решек. Это классический пример для определения точного среднего.

Но практика не всегда вторит теории, а действительное — желаемому. Реальные явления часто таковы, что их внутренние механизмы до конца не поддаются исследованиям, опыты уникальны, их повторы неустойчивы, а предварительные наблюдения ограничены. В результате точное среднее остается как идеальное понятие, достигаемое в пределе, применение которого сопровождается многими «вот если бы» или «пусть...».

Интервальные средние и вероятности. Генеральная ваша мысль такова, что не только неустойчивость явлений, но и любая неабсолютность статистических знаний (недостаточность, неточность, ограниченность), свойственная почти всем реальным задачам, естественно вынуждает переход к интервальным понятиям. Расширим понятие среднего, отказавшись от его определения как числа.

Интервальным средним признака f называется отрезок $[\underline{M}f, \overline{M}f]$ с границами $\underline{M}f$ — *нижним средним* и $\overline{M}f$ — *верхним средним*. В частном случае равенства $\underline{M}f = \overline{M}f = Mf$ интервальное среднее переходит в *точное* и обозначается без черточек. Другой частный случай, когда границы интервального среднего совпадают с минимальным и максимальным значениями функции: $\underline{M}f = \inf f$, $\overline{M}f = \sup f$. Это означает, что о среднем ожидаемом значении признака f ничего неизвестно. Оно любое в промежутке значений f. Здесь уже не важно, устойчиво или неустойчиво явление, можно ли организовать повторы или нет: ничто есть ничто.

Таким образом, интервальное среднее $[\underline{M}f, \overline{M}f]$ дает широкий охват описания среднестатистических свойств признаков от полного незнания до точного знания среднего. Интерпретировать его можно по-разному. И как диапазон возможных значений существующего (но неизвестного) точного значения Mf в статистически устойчивом эксперименте и как введение защитного допуска на Mf от неустойчивости явления. И вообще, как более общее понятие, чем точное среднее, когда последнее в силу упомянутых ранее обстоятельств не определяется. Важно то, что в отличие от точного интервальное среднее всегда существует хотя бы потому, что всегда имеется возможность перехода к крайнему случаю полного названия этого среднего.

При $f(x) = A(x)$ интервальное среднее превращается в интервальную вероятность $[\underline{P}(A), \overline{P}(A)]$; $\underline{P}(A) = \underline{M}A$, $\overline{P}(A) = \overline{M}A$. На простейших примерах проиллюстрируем некоторые ее интерпретации.

Пример 1.1. Пусть имеется астрагал (кость конечности животного) с четырьмя состояниями при бросании. Понятно, что точные вероятности всех этих состояний существуют. Но чтобы найти их, требуется бесконечно долгий эксперимент. По ограниченному эксперименту можно оценить вероятности лишь приближенно в виде некоторых доверительных интервалов значений. Это и будут интервальные вероятности.

Пример 1.2. Имеются два одинаковых с виду кубика с нанесенными на гранях от 1 до 6 очков. Для симметричного кубика вероятность выпадения одной грани, скажем шестерки, равна 1/6. У другого же кубика центр тяжести смещен в сторону, противоположную шестерке (в средние века по вполне понятной хитрости в кубики заливали куски металла), и вероятность выпадения шести очков стала больше 1/6: $p_6>1/6$. Неизвестно, какой из кубиков и в какой последовательности подставляется в игре. Тогда вероятность шестерки будет интервальная $[1/6,\ p_6]$. При увеличении повторов эксперимента относительная частота шестерок в разных сериях может сходиться к любому числу из этого интервала. Здесь неустойчивость вызвана вмешательством человеческого фактора в виде совершенно неизвестной стратегии подстановок. При известных стратегиях интервал сужается вплоть до точных значений (когда берется кубик одного типа).

Пример 1.3. Пусть монета не бросается, а одна или другая ее сторона показывается некоторым субъектом. Это будет демонстрацией статистической неустойчивости в своей природе человеческого фактора даже при полнейшем желании делать показ независимо а равновозможно. Если здесь и можно описать среднестатистический результат, то лишь интервальной вероятностью (зависящей от психических особенностей субъекта).

Математическая модель явления. Математическая модель — это единообразная удобная для разработчиков символьная форма описания результатов явления совместно с присущими им закономерностями. Предыдущими рассуждениями мы подошли к ее пониманию. Имеется пространство $\mathscr{X}$ элементарных исходов, а на нем определено неисчислимое множество числовых признаков, одни из которых мажорируют другие, мажорируются третьими или их линейными комбинациями и т. д. Для всех абсолютно ограниченных признаков f, класс которых обозначим $\mathscr{F}_{00}=\{f:\sup_x|f(x)|<\infty\}$, существуют интервальные средние $\underline{M}f$, $\overline{M}f$ внутри промежутка значений f. Но этого может оказаться еще мало.

Модели станут более универсальными, если избирательно допускать существование средних на некоторых неограниченных признаках. Для ряда признаков это естественно: так, если признак f не ограничен снизу, но ограничен сверху $\sup f=H<\infty$ числом H, то верхнее среднее $\overline{M}f$ не может быть больше H, поэтому существует. Итак, имеем $\overline{M}f<\infty$ на классе $\mathscr{F}_0=\{f:\sup f<\infty\}$ всех ограниченных сверху функций. Аналогично, нижние средние $\underline{M}f$ существуют на классе $(-\mathscr{F}_0)$ (получается из $\mathscr{F}_0$ переменной знака функций) всех ограниченных снизу функций. Нужды практики при их строгом оформлении требуют в целом ряде задач существования средних на более широких классах неограниченных признаков.

Назовем класс $\mathscr{F}$ признаков, на котором определены $\overline{M}f<\infty$, *областью существования верхних средних*. Мы увидим далее, что перемена знака у признаков приведет к классу $(-\mathscr{F})$, на котором будут существовать нижние средние: $\underline{M}f$, $f\in-\mathscr{F}$, а на их пересечении будут и те, и другие, т. е. интервальные средние. Не исключается $\mathscr{F}=\mathscr{F}_0$, но это будет самый узкий возможный класс.

Если это более широкий класс, то $\mathscr{F}$ должен удовлетворять трем свойствам:

C1. $g\in\mathscr{F},\ f\leqslant g\Rightarrow f\in\mathscr{F}$;

C2. $f\in\mathscr{F},\ c,\ b^+\in\mathscr{R},\ b^+\geqslant 0\Rightarrow b^+f+c\in\mathscr{F}$;

C3. $f,\ g\in\mathscr{F}\Rightarrow f+g\in\mathscr{F}$.

(Очевидно, для $\mathscr{F}_0$ все они выполняются.) Из перечисленных свойств следует: 1) $c\in\mathscr{F}$, где c есть признак, принимающий постоянное значение c (получается из **C2** при $b^+=0$); 2) $\mathscr{F}\supset\mathscr{F}_0$ (из **C1** и 1); 3) $f_i\in\mathscr{F},\ i=1,\ \ldots,\ k\Rightarrow c+\sum_{i=1}^{k}b^+_i f_i\in\mathscr{F}$, где плюс означает неотрицательность чисел $b^+_i\geqslant 0$. Последнее свойство называется *полулинейностью*, а класс $\mathscr{F}$ со свойствами **C1**, **C2**, **C3** — *полулинейным*.

Математическая модель явления включает в себя: а) пространство $\mathscr{X}$ элементарных событий, б) полулинейный класс $\mathscr{F}$ признаков (если он шире $\mathscr{F}_0$), в) средние на нем; а все вместе это $\{\mathscr{X},\ \mathscr{F},\ \overline{M},\ \underline{M}\}$ или $\{\mathscr{X},\ \overline{M},\ \underline{M}\}$ при $\mathscr{F}=\mathscr{F}_0$. Перейдем к основной части модели: требованиям к $\overline{M}$ и $\underline{M}$.

Аксиоматика. Средние $\underline{M}f$, $\overline{M}f$ разных признаков должны находиться в определенной взаимной пропорции (устанавливаемой, например, из примера 1 или 2 введения). При принятом нами подходе, в котором средние являются самостоятельными составляющими модели, отношения между средними должны постулироваться. Среди отношений нужно выделить основополагающие, называемые *аксиомами*, тогда другие становятся вытекающими из аксиом свойствами. Важно, сколько задать аксиом.

Если аксиоматически связать средние сразу слишком жесткими отношениями, то это сузит классы возможных моделей. Лучше создать как можно более свободную конструкцию, имея в виду, что усиление всегда достижимо внедрением дополнительных свойств внутрь конкретной модели или класса моделей. Таким образом, аксиом должно быть по возможности меньше, но чтобы остаться в рамках физической интерпретируемости модели (иначе возникнет новая теория).

Аксиомы средних. Для $\forall f,\ g\in\mathscr{F}$:

A1. $g\geqslant f\Rightarrow\overline{M}g\geqslant\overline{M}f$;

A2. $\overline{M}(b^+f+c)=b^+\overline{M}f+c$; $\forall b^+\geqslant 0,\ c\in\mathscr{R}$;

A3. $\overline{M}(f+g)\leqslant\overline{M}f+\overline{M}g$;

A4. $\underline{M}(-f)=-\overline{M}f$.

Здесь стрелка $\Rightarrow$ заменяет слово «следует», а плюс в верхнем индексе указывает на неотрицательность числа. Обсудим аксиомы.

A1 — аксиома сохранения порядка: если признак g мажорирует f, то верхнее среднее у него не меньше, чем у f. Иначе и не может быть, так как значения g всегда будут меньше f.

A2 — аксиома переноса: умножение признака f на неотрицательное число и прибавление к нему любого постоянного числа приводит к таким же операциям над $\overline{M}f$. Это понятно, ибо так преобразуется каждое значение признака.

A3 — *аксиома полуаддитивности*: верхнее среднее от суммы признаков не больше суммы их верхних средних. В самом деле, для суммы одинаковых признаков $f+f$ на основании **A2** при $c=0$, $b^+=2$ будет справедливо равенство: $\overline{M}(f+f)=\overline{M}f+\overline{M}f$. Это как раз случай «синфазного» сложения, когда положительная часть складывается с такой же положительной, отрицательная — с отрицательной. В общем, сложение разных признаков не будет синфазным, что и ведет к уменьшению $\overline{M}(f+g)$ по сравнению с $\overline{M}f+\overline{M}g$.

A4 — *аксиома обращения*: однозначно связывает нижние средние с верхними, для чего у признака меняется знак. Следует из того, что для любого интервала $[\underline{m}, \overline{m}]$ при перемене знака границы меняются местами: $[-\overline{m}, -\underline{m}]$. По этой аксиоме, коль скоро $\overline{M}f$ определены на $\mathscr{F}$, то $\underline{M}f$ будут определены на $-\mathscr{F}$.

Конечно же, дело «вкуса», какие из равносильных свойств средних брать в качестве аксиом, поэтому сделанный выбор не нуждается в обсуждении.

Определение интервальной модели средних, основные свойства. *Интервальной моделью средних* (сокращенно, ИМ) называется совокупность верхних средних $\overline{M}f$ на заданной области их существования $f\in\mathscr{F}$ (удовлетворяющей свойствам **C**1, **C**2, **C**3) и нижних средних $\underline{M}f$, $f\in-\mathscr{F}$, *согласованных* между собой в том смысле, что удовлетворяются аксиомы **A**1 сохранения порядка, **A**2 переноса, A3 полуаддитивности и **A**4 обращения. Интервальная модель средних обозначается $\mathscr{M}$ или $\langle\overline{M}\mathscr{F}\rangle$.

Непосредственно из аксиом выводятся такие свойства (полагаем признаки из соответствующих областей существования):

1. $M(b^+f+c)=b^+\underline{M}f+c$ (следует из **A**2 переменной знака и **A**4);

2. Для любых констант $\overline{M}c=c$ (из **A**2 и **1** при $b^+=0$);

3. $\underline{M}(f+g)\geqslant\underline{M}f+\underline{M}g$ (из **A**3 и **A**4);

4. $\overline{M}\sum\limits_1^k f_i\leqslant\sum\limits_1^k\overline{M}f_i$ — верхняя полуаддитивность (из **A**3 по индукции);

5. $\underline{M}\sum f_i\geqslant\sum\underline{M}f_i$ — нижняя полуаддитивность (из **3** по индукции);

6. $\underline{M}f\leqslant\overline{M}f$ (**A**3 и **A**4$\Rightarrow 0=M0=\overline{M}(f-f)\leqslant\overline{M}f-\underline{M}f$);

7. $f\geqslant g\Rightarrow\overline{M}f\geqslant\overline{M}g$ (из **A**1 переменной знака функции и **A**4);

8. $\inf f\leqslant\underline{M}f$, $\overline{M}f\leqslant\sup f$ (из **7**, **A**1 и **2**, так как $\inf f\leqslant f\leqslant\sup f$);

9. $|\overline{M}|f=\max\{|\underline{M}f|, |\overline{M}f|\}\leqslant\overline{M}|f|$ (так как $\pm f\leqslant|f|\Rightarrow\overline{M}f\leqslant\overline{M}|f|$, $-\underline{M}f\leqslant\overline{M}|f|$, здесь $|\overline{M}|$ — новое обозначение, называемое максимальным по модулю средним);

10. $\underline{M}(f+g)\leqslant\underline{M}f+\overline{M}g\leqslant\overline{M}(f+g)$ — псевдоаддитивность (из **3** и **A**4 $\underline{M}f=\underline{M}[(f+g)-g]\geqslant\underline{M}(f+g)-\overline{M}g$; из **A**3 и **A**4 $\overline{M}g=\overline{M}[(g+f)-f]\leqslant\overline{M}(g+f)-\underline{M}f$);

11. Mg точное $\Rightarrow\overline{M}(f+g)=\overline{M}f+Mg$; $\underline{M}(f+g)=\underline{M}f+Mg$ (из **A**3, **3** и **10**);

12. $M\sum\limits_{i=1}^k f_i=\sum\limits_{i=1}^k Mf_i$ — конечная аддитивность точных средних Mf_i, $i=1, \ldots, k$;

13. Непрерывность средних по отношению к равномерной при $n\to\infty$ сходимости функций:

$$\sup_x|f_n(x)-f(x)|\to0\Rightarrow\underline{M}f_n\to\underline{M}f,\ \overline{M}f_n\to\overline{M}f$$

(так как $|\underline{M}f_n-\underline{M}f|$ и $|\overline{M}f_n-\overline{M}f|$ не превышают $\sup|f_n-f|$).

Итак, из аксиом получены такие естественные свойства, что нижнее среднее $\underline{M}f$ не больше верхнего **6** и не меньше нижней грани функции **8**. Для $\underline{M}f$ также справедлив закон переноса **1**. Свойства **3**, **4**, **5**, **10** — подмена свойства аддитивности **12**, справедливого для точных средних.

Формально определив ИМ, мы пока не указали конкретно, что представляет собой область существования $\mathscr{F}$ верхних средних и насколько она может быть шире $\mathscr{F}_0$. Ограничились только ее свойствами полулинейности **C**1, **C**2, **C**3. Конкретизация $\mathscr{F}$ будет произведена после того, как мы познакомимся с универсальным способом задания ИМ, к которому и обратимся.

1.2. ПРОДОЛЖЕНИЕ ПЕРВИЧНЫХ СРЕДНИХ

Вступление. Утилитарные достоинства той или иной теории, тех или иных моделей и методов определяются по трем основным направлениям:

1) универсальность — нацеленность на работу с широким классом объектов или явлений;

2) удобство и гибкость аппарата, податливость к упрощениям, грубым прикидкам;

3) простота и естественность перевода «языка явлений» на язык адекватных им моделей и физическая интерпретируемость параметров модели.

Во многом направления перекликаются между собой, но скорее это три похожих зайца, бегущих в разные стороны. Задержим взгляд на последнем.

У модели должны быть выделены приоритетные, первичные параметры, связывающие ее с явлением, варьируя число и значения которых, можно достичь адекватности модели, подобно прибору, подкручивая ручки которого добиваются настройки. Мы покажем, что любой набор признаков с заданными для них средними (точными или размытыми, в виде интервала или одной границы) может играть роль первичных параметров ИМ. Этим результатом убиваются все три зайца: универсальность достигается за счет разнообразия выбора первичных признаков, а гибкость и интерпретируемость — выбором их числа и варьируемости границ интервальных средних, смысл которых нам уже известен.

Первичные признаки и средние. Пусть $\mathscr{G}^*$ — набор *первичных признаков.* Неважно, какой он, конечный или бесконечный, состоит из ограниченных признаков или нет — это вопрос приложений. Каждый из этих признаков $g\in\mathscr{G}^*$ есть функция $g(x)$ переменной x, пробегающей множество $\mathscr{X}$ элементарных исходов, поэтому они называются также первичными функциями. Для каждого первичного признака $g\in\mathscr{G}^*$ заданы интервальные первичные средние $\underset{\sim}{M}g$, $\widetilde{M}g$ или одно из этих значений. Волнистая черта подчеркивает не столько то, что это первичные средние, сколько то, что они могут быть в общем не согласованы между собой в смысле выполнения аксиоматических свойств **A**1, **A**2, **A**3 и **A**4. Необязательность контроля согласованности дает определенную вольность, упрощающую процедуру задания первичных средних, а значит, и самих моделей.

Для g может быть известно $\underset{\sim}{M}g$ и (или) $\widetilde{M}g$, поэтому выделим из набора $\mathscr{G}^*$ два поднабора: верхний $\mathscr{G}_{\text{в}}$, на котором определены $\widetilde{M}g$, и нижний $\mathscr{G}_{\text{н}}$ с $\underset{\sim}{M}g$. На их пересечении $\mathscr{G}_{\text{в}}\cap\mathscr{G}_{\text{н}}$ заданы и те, и другие, т. е. первичные интервалы $\underset{\sim}{M}g$, $\widetilde{M}g$ средних.

Нижний первичный поднабор $\mathscr{G}_{\text{н}}$ моментально обращается в верхний. Для этого, опираясь на **A**4, определим $\widetilde{M}(-g)=-\underset{\sim}{M}g$, и, таким образом, вместо g с заданным нижним средним $\underset{\sim}{M}g$ имеем функцию с противоположным знаком $g_1=-g$ с заданным на ней уже верхним средним, равным $\widetilde{M}g_1=-\underset{\sim}{M}g$. Подвергая указанному обращению все $g\in\mathscr{G}_{\text{н}}$, исходный набор $\mathscr{G}^*$ переводим в эквивалентный верхний первичный набор $\mathscr{G}=\mathscr{G}_{\text{в}}\cup(-\mathscr{G}_{\text{н}})$. Теперь заданным считается $\widetilde{M}g$, $g\in\mathscr{G}$. Такое приведение, подчас неудобное с позиций естественной интерпретируемости параметров модели, оказывается тем не менее весьма удобным для унификации и упрощения записи формул.

Несмотря на отсутствие требования согласованности, первичные верхние средние $\widetilde{M}g$, $g\in\mathscr{G}$, нельзя задавать совсем произвольно, так как это может привести к противоречию (скажем, $g(x)\geqslant 0$, а $\widetilde{M}g<0$).

Первичные средние $\widetilde{M}g$, $g\in\mathscr{G}$, называются *непротиворечивыми*, если при любом конечном выборе $g_i\in\mathscr{G}$, чисел $c^+_i\geqslant 0$ и c, таком, что $c+\sum c^+_i g_i(x)\geqslant 0$, имеет место $c+\sum c^+_i\widetilde{M}g_i\geqslant 0$. Признаки в левой части первого неравенства назовем *вторичными*.

Обозначим $\mathscr{L}^+\mathscr{G}=\{g(x)=c+\sum c^+_i g_i(x),\ g_i\in\mathscr{G}\}$ — класс всех возможных вторичных признаков, т. е. конечных линейных комбинаций первичных функций g_i с неотрицательными при них коэффициентами c^+_i и произвольным свободным членом c. Назовем *$\mathscr{L}^+\mathscr{G}$ полулинейной оболочкой $\mathscr{G}$* (или полулинейной комбинацией признаков $\mathscr{G}$) и, пользуясь аксиомой **A**2, формально перенесем на нее первичные средние

$$\widetilde{M}g=\widetilde{M}\left(c+\sum c_i^+ g_i\right)=c+\sum c_i^+\widetilde{M}g_i,\quad g\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}. \tag{1.1}$$

Теперь требование непротиворечивости формулируется следующим образом:

$$0\leqslant g\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}\Rightarrow\widetilde{M}g\geqslant 0,$$

т. е. для вторичных признаков g, принимающих только неотрицательные значения, верхнее среднее (заданное, преобразованное из нижнего или перенесенное с $\mathscr{G}$ на $\mathscr{L}^+\mathscr{G}$) не должно быть отрицательным. Необходимость непротиворечивости не требует пояснений. Ниже на примерах будет показано, во что оно выливается.

Переходим к основному результату. Обозначим $\mathscr{F}_{\mathscr{G}}=\{f:f\leqslant g\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}\}$ — класс признаков, таких, что каждый из них мажорируется хотя бы одним вторичным. Таким образом, имеем $f\in\mathscr{F}_{\mathscr{G}}$, если в $\mathscr{L}^+\mathscr{G}$ существует хотя бы один признак g, такой, что $f\leqslant g$. Очевидно, что в $\mathscr{F}_{\mathscr{G}}$ входят все ограниченные сверху признаки (мажорируются постоянными $c\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}$), поэтому $\mathscr{F}_0\subset\mathscr{F}_{\mathscr{G}}$, причем $\mathscr{F}_0=\mathscr{F}_{\mathscr{G}}$, если все $g\in\mathscr{G}$ ограничены.

Назовем $\mathscr{F}_{\mathscr{G}}$ *классом $\mathscr{G}$-мажорируемых признаков.*

Теорема продолжения и согласования средних.

Теорема 1.1. *Если первичные средние $\widetilde{M}g_i$, $g_i\in\mathscr{G}$, непротиворечивы, то по формуле*

$$\overline{M}f=\inf_{g\,:\,f(x)\leqslant g(x)\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}}\widetilde{M}g,\quad f\in\mathscr{F}_{\mathscr{G}};\quad \underline{M}f=-\overline{M}(-f),\quad f\in-\mathscr{F}_{\mathscr{G}}, \tag{1.2}$$

они продолжаются, делаясь согласованными, на все $\mathscr{G}$-мажорируемые признаки $f\in\mathscr{F}_{\mathscr{G}}$, образуя ИМ $\mathscr{M}$ с областью существования верхних средних $\mathscr{F}=\mathscr{F}_{\mathscr{G}}$.

Иначе, также (1.2) записываем:

$$\overline{M}f=\inf\{\widetilde{M}g:f(x)\leqslant g(x)\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}\}.$$

Доказательство. Аксиомы **A**1 и **A**2 очевидны из (1.2), аксиома **A**4 выполняется по определению. Остается проверить аксиому **A**3. Так как $f_1(x)\leqslant g^*(x)\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}$, $f_2(x)\leqslant g^{**}(x)\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}\Rightarrow f_1(x)+f_2(x)\leqslant g^*(x)+g^{**}(x)=g(x)\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}$ и $\widetilde{M}g^*+\widetilde{M}g^{**}=\widetilde{M}g$, то

$$\overline{M}(f_1+f_2)=\inf\{\widetilde{M}g:f_1+f_2\leqslant g\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}\}\leqslant$$

$$\leqslant\inf\{[\widetilde{M}g^*+\widetilde{M}g^{**}]:f_1\leqslant g^*\in\mathscr{L}^+\mathscr{G},\ f_2\leqslant g^{**}\in\mathscr{L}^+\mathscr{G}\}=\overline{M}f_1+\overline{M}f_2,$$

что и требовалось доказать.

Согласно (1.2) для нахождения $\overline{M}f$ из первичных составляются вторичные признаки $g(x)=c+\sum c^+_i g_i(x)$ так, чтобы они мажорировали $f(x)$, т. е. $g(x)\geqslant f(x)$. Каждый из этих $g(x)$ будет иметь в общем свое значение $\widetilde{M}g$, определяемое (1.1). Берется «наилучшее» среди них, т. е. то, которое минимально.

В (1.2) заложен следующий принцип конструктивной математики: получать лишь результаты, к которым можно сколь угодно приблизиться за конечное число операций. Именно поэтому вторичные признаки набираются как конечные суммы первичных. Действие этого принципа раскрывается вытекающим из (1.2) следствием.

Следствие. *Каждому f, верхнее среднее $\overline{M}f$ которого конечно, и заданному $\varepsilon>0$ всегда можно указать такую мажорирующую конечную линейную комбинацию $g(x)=c+\sum c^+_i g_i(x)\geqslant f(x)$ первичных признаков (т. е. вторичный признак), что*

$$\overline{M}f+\varepsilon\geqslant c+\sum c_i^+\tilde{M}g_i=\tilde{M}g.$$

Поскольку $g\geqslant f\Rightarrow\tilde{M}g\geqslant\overline{M}f$, для следствия верно $|\tilde{M}g-\overline{M}f|\leqslant\varepsilon$. При уменьшении ε понадобится вовлекать в g большее число первичных признаков для приближения к $\overline{M}f$, количество операций возрастает.

Отношения между определенными нами множествами признаков иллюстрируются рис. 1.2. Здесь каждая из верхних полусфер включает в себя все нижние. Согласно теореме 1.1 средние с первичного набора $\mathcal{G}$ продолжаются на линейные комбинации $\mathcal{L}^+\mathcal{G}$ первичных признаков (вторичные признаки) и уже через них распространяются на класс $\mathcal{F}_\mathcal{G}$ признаков, мажорируемых вторичными. Это и будет областью существования верхних средних; ядром ее является класс $\mathcal{F}_0$ всех ограниченных сверху признаков: $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_\mathcal{G}$. В $\mathcal{F}_\mathcal{G}$ войдут и неограниченные признаки, если неограниченные имеются среди первичных, а иначе, $\mathcal{F}_\mathcal{G}=\mathcal{F}_0$.

Согласованные первичные средние. Замечательно то, что (1.2) не только дает верхние средние $\overline{M}f$ для $\forall f\in\mathcal{F}_\mathcal{G}$ (в частности, $\underline{M}f$, $\overline{M}f$ для $\forall f\in\mathcal{F}_{00}$), но и попутно, подстановкой $g_i\in\mathcal{G}$ как части f, уточненные и согласованные между собой $\overline{M}g_i$. Так как g_i мажорирует сам себя как первичный признак, то согласно (1.2) $\tilde{M}g_i\geqslant\overline{M}g_i$, $g_i\in\mathcal{G}$. Если получается $\tilde{M}g_i=\overline{M}g_i$, то первичное значение $\tilde{M}g_i$ само по себе уже согласовано с другими средними и обозначается $\overline{M}g_i$. Если же $\tilde{M}g_i>\overline{M}g_i$, то найдутся вторичные признаки, мажорирующие g_i, уточняющие $\tilde{M}g_i$, а само $\tilde{M}g_i$ будет *несогласованным* и без ущерба может быть изъято из первичного набора. Таким образом, *могут влиять на вид ИМ только согласованные первичные средние*, да и то, как будет видно дальше,

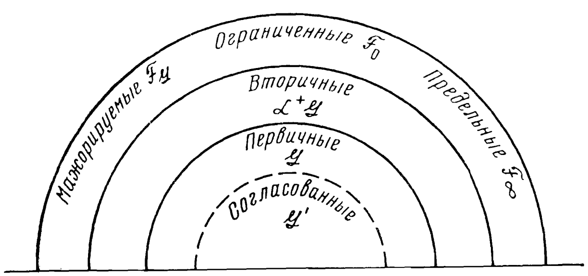


Рис. 1.2. Этапы продолжения средних

не обязательно все. Их минимальное число называется *размерностью* ИМ. Интервальная модель, первичными для которой являются $\tilde{M}g$, $g\in\mathcal{G}$, обозначается $\langle\tilde{M}\mathcal{G}\rangle$, а если все несогласованные первичные признаки исключены из набора, то $\langle\overline{M}\mathcal{G}'\rangle$, $\mathcal{G}'\subset\mathcal{G}$.

Расширение первичного набора включением в него средних $\overline{M}f$, найденных по (1.2), не меняет ИМ, поэтому получаем одно и то же, если брать за первичный набор $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}'$ или все $\mathcal{F}=\mathcal{F}_\mathcal{G}:\mathcal{M}=\langle\tilde{M}\mathcal{G}\rangle=\langle\overline{M}\mathcal{G}'\rangle=\langle\overline{M}\mathcal{F}\rangle$. Заметим при этом одну особенность, что несогласованные первичные признаки g_i, для которых $\tilde{M}g_i>\overline{M}g_i$, обязательно должны быть мажорируемы хотя бы одним из вторичных признаков $g\in\mathcal{L}^+\mathcal{G}$, который и даст на основе (1.2) уточненное значение $\overline{M}g_i$. Таким образом, $\mathcal{L}^+\mathcal{G}'=\mathcal{L}^+\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}_{\mathcal{G}'}=\mathcal{F}_\mathcal{G}$.

Из сказанного также следует, что первичные средние $\widetilde{M}g_i$, $g_i\in\mathcal{G}$, являются согласованными в том и только том случае, если справедливо: $g_i(x)\leqslant g(x)\in\mathcal{L}^+\mathcal{G}\Rightarrow\tilde{M}g_i\leqslant\tilde{M}g$ для всех $g_i\in\mathcal{G}$ и $g\in\mathcal{G}^+\mathcal{L}$, удовлетворяющих первому неравенству. Тогда $\tilde{M}g_i=\overline{M}g_i$, $\forall g_i\in\mathcal{G}$.

Признаки случайных величин. В качестве примера рассмотрим тот случай, когда $\mathcal{X}=\mathcal{R}$ — числовая прямая. Такое явление имеет числовые исходы и называется *случайной величиной* (сокращенно с. в.). Признаками f с. в. могут быть любые числовые функции $f(X)$ на $\mathcal{R}$ (далее числовые исходы $X\in\mathcal{R}$ обозначаются заглавными буквами).

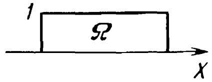
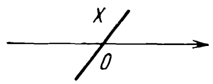
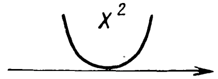
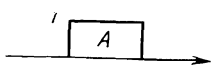
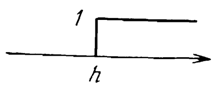
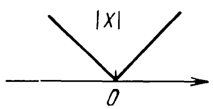
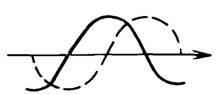
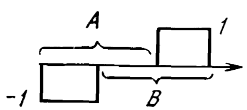
Случайная величина называется дискретной, если возможные ее значения составляют конечное или счетное множество Ω точек. Удобно считать для таких с. в. пространством исходов всю прямую $\mathcal{R}$, а тот факт, что $\Omega\subset\mathcal{R}$, отразить добавлением первичной вероятности $\underline{P}(\Omega)=1$ (напомним, что $\underline{P}(A)=\underline{M}A(x)$), согласно которой Ω есть достоверное событие. Так как $\overline{P}(\Omega)\geqslant\underline{P}(\Omega)=1$, то можно написать $P(\Omega)=1$.

Некоторые характерные признаки с. в. упорядочены в табл. 1.1. Дадим два примера расчета их средних по теореме 1.1.

Пример 1.4. Пусть известно, что среднее с. в. равно m; записываем $MX=m$ (т. е. $\overline{M}(\pm X=\pm m)$. Оно согласовано и продолжается на основании свойства **12** на вторичные признаки $f(X)=c+c_1X$: $M(c+c_1X)=c+c_1MX$. Область существования $\mathcal{F}$ составляют функции, мажорируемые прямыми $c+c_1X$. Так как $c^2-2cX\geqslant-X^2$, то $-X^2\in\mathcal{F}$ и $\overline{M}(-X^2)=\min\limits_c(-2cm+c^2)=-m^2$, т. е. $\underline{M}X^2=m^2$. Функция X^2 не мажорируется прямыми, поэтому $\overline{M}X^2=\infty$ и $X^2\notin\mathcal{F}$. Для любых индикаторных признаков $A(x)$ событий невозможно подыскать мажорирующую прямую $c+c_1X$, кроме $c=0$, $c_1=1$, поэтому $\underline{P}(A)\equiv0$, $\overline{P}(A)\equiv1$. Отсюда вывод, что первичное среднее, будучи в единственном числе, нетривиальных данных о событиях не несет.

Пример 1.5. Пусть первичным для с. в. X является верхнее среднеквадратическое (мощность с. в.) $\overline{M}X^2=\bar{b}$, что порождает ИМ размерности 1. Об-

Таблица 1.1

Характеристика случайной величины	Формальное обозначение	Признаки
Ω — множество значений с. в.	$\underline{P}(\Omega)=1$	
Среднее с.в. точно равно m лежит в интервале $\underline{m}$, $\overline{m}$	$MX=m$ $\underline{M}X=\underline{m}$, $\overline{M}X=\overline{m}$	
Среднеквадратическое с.в. не меньше $\underline{b}$ и не больше $\overline{b}$	$\underline{M}X^2=\underline{b}$, $\overline{M}X^2=\overline{b}$	
Вероятность попадания в отрезок A лежит в заданных пределах	$\underline{P}(A)$, $\overline{P}(A)$	
Вероятность «выброса» за уровень h не больше p_h	$\overline{P}(X>h)=p_h$	
Среднее модуля с.в. лежит в указанных пределах	$\underline{M}\,\lvert X\rvert$, $\overline{M}\,\lvert X\rvert$	
Средние гармонические признаков	$\underline{M}\cos uX$, $\overline{M}\cos uX$ $\underline{M}\sin uX$, $\overline{M}\sin uX$	
Вероятность попадания в отрезок A больше, чем в отрезок B (§ 1.4)	$\overline{M}[B(x)-A(x)]\le 0$	

ласть существования верхних средних $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ составляют все признаки $f(X)$, мажорируемые параболами вида $c+c_2^+X^2$, т. е. те f, для которых $\overline{\lim}_{|X|\to\infty} f(X)/X^2<\infty$. При $a_1>0$, подбирая, как это видно из рис. 1.3, соответствующим образом мажорирующую параболу: $c=0$, $c^+_2=a_1^{-2}$, $\{a_1\le X\le a_2\}\le X^2/a^2_1$, находим: $\overline{P}(a_1\le X\le a_2)\le\overline{M}X^2/a^2_1=\overline{b}/a^2_1$ (при $a_2=\infty$ имеем аналог неравенства Чебышева). Равенство будет, когда правая часть меньше 1, т. е. при $a_1>\sqrt{\overline{b}}$ (при $a_2<0$ заменяется a_1 на a_2), иначе вероятность $\overline{P}$ тривиальна и равна 1. Таким образом, знание $\overline{b}$ делает нетривиальными верхние вероятности отрезков, удаленных от начала оси по крайней мере на расстояние, превышающее $\sqrt{\overline{b}}$.

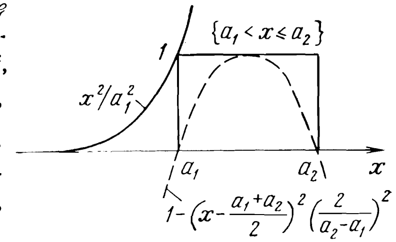


Рис. 1.3. Расчет вероятностей по мощности

Найдем при тех же исходных данных $\overline{M}X$. Мажорируя прямую X параболой: $X\le c+c^+_2X^2$, $\forall X$, что эквивалентно $4c_0c^+_2\ge 1$, и минимизируя при последнем ограничении (замененном на равенство) среднее параболы $\overline{M}(c+c^+_2X^2)=$ $=c+c^+_2\overline{b}$, находим ее коэффициенты $c^+_2=1/(2\sqrt{\overline{b}})$, $c=1/4c^+_2=\sqrt{\overline{b}}/2$, подстановкой которых получаем $\overline{M}X=\sqrt{\overline{b}}$. Аналогичен путь нахождения $\overline{M}(X\pm m)^2$, для чего $(X\pm m)^2$ мажорируется параболой $c+c^+_2X^2$, откуда вытекает требование на ее коэффициенты: $c>c^+_2m^2/(c^+_2-1)$, минимизируя при этом ограничении среднее параболы, получаем коэффициенты $c^+_2=1+|m|\sqrt{\overline{b}}$, $c=$ $=(\sqrt{\overline{b}}+|m|)|m|$, откуда $\overline{M}(X\pm m)^2=(|m|+\sqrt{\overline{b}})^2$.

Пусть теперь к среднеквадратическим в качестве первичных добавляется нулевое среднее $MX=0$ (что эквивалентно $\overline{M}(\pm X)=0$). Тогда ИМ сужается, ее размерность становится равной 3. Вторичными будут уже любые направленные вверх параболы со средними на них $\overline{M}[c+c^+_2(X-c_1)^2]=c+c^+_2\overline{b}+$ $+c^+_2c^2_1$, где использовалось свойство **11** § 1.1. В частности, отсюда $\overline{M}(X\pm m)^2=$ $=\overline{M}X_2+m^2=\overline{b}+m^2$.

Будем искать вероятности событий, а именно отрезков. Среди парабол, мажорирующих индикаторный признак отрезка: $\{a_1\le X\le a_2\}\le c+c^+_2(X-c_1)^2$, а это будет при $c\ge 0$, $c_1\le a_1$, $c+c^+_2(a_i-c_1)^2\ge 1$, нужно найти такую подбором коэффициентов c, c_1, c^+_2, у которой минимально верхнее среднее. Несложными вычислениями находим: $c=0$, $c_1=-\overline{b}/a_1$, $c^+_2=(a_1+\overline{b}/a_1)^{-2}$, где считалось $a_1>0$ (при $a_2<0$ нужно a_1 заменить на a_2), в результате вероятность равна минимальному среднему параболы: $\overline{P}(a_1\le X\le a_2)=(1+a^2_1/\overline{b})^{-1}$. Вероятность нетривиальна при любом $a_1>0$ (или $a_2<0$).

Нижнюю вероятность отрезка рассчитаем, «вписав» параболу (нанесена штриховой линией на рис. 1.3), с которой переносится на событие среднее

$$\underline{P}(a_1\le X\le a_2)\ge 1-\overline{M}\left(X-\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2\left(\frac{2}{a_2-a_1}\right)^2=$$
$$=1-\frac{4\overline{b}+(a_1+a_2)^2}{(a_2-a_1)^2}.$$

Правая часть больше 0 при $-a_1a_2>\overline{b}$ (отсюда $a_1<0$ и $a_2>0$), и тогда получаем нижнюю вероятность (иначе, она 0). Итак, знание нулевого среднего, уточняя верхние вероятности отрезков, отстоящих на $|a_1|$ от начала оси, делает нетривиальными нижние вероятности достаточно широких отрезков, включающих начало оси. Отметим, что дополнительное знание $\underline{M}X^2=\underline{b}$ вероятностей не меняет.

Признаки случайных процессов. Случайный процесс X_t есть нумерованная индексом t (называемым временем) последовательность с. в. Значениями t могут быть отрезок $[0, T]$ временной оси $\mathcal{R}$, вся ось, некоторые дискретные точки-отсчеты $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — на этой оси (тогда процесс становится вектором). Это сейчас неважно. Обозначим T — множество этих значений.

Пространство исходов $\mathscr{X}$ будут всевозможные реализации x_t, $t \in \mathrm{T}$ как функции времени t.

Чтобы описать процесс, нужно описать каждую с. в. X_t в отдельности своими признаками, как это было проделано, а также связь между X_t и $X_{t'}$ при различных t и $t' \in \mathrm{T}$. Признаки этой связи, в частности, составляют произведения $X_tX_{t'}$, а их средние $\underline{M}X_tX_{t'}=\underline{b}_{t,t'}$, $\overline{M}X_tX_{t'}=\overline{b}_{t,t'}$ будут нижней и верхней *корреляционными функциями*. В более общем случае — это корреляции после преобразования каждой с. в. одной и той же функцией F (так называемые безынерционные преобразования), тогда первичными параметрами процесса будут $\underline{M}F(X_t)F(X_{t'})$, $\overline{M}F(X_t)F(X_{t'})$. Так, если $F(X)=\{X>h\}$ — индикаторная функция превышений уровня h, то это будет корреляция превышений (при $h=0$ корреляция полярностей).

Отличными от указанных являются признаки в виде интегралов, такие как $\int_{\mathrm{T}} F(X_t)\,dt$. В частности, $\frac{1}{T}\overline{M}\int_0^T X_t^2\,dt$ будет верхней средней интегральной мощностью процесса на отрезке $\mathrm{T}=[0, T]$.

Таким образом, признаки и их средние являются универсальной формой описания любых явлений. Сложность описания диктуется не столько пространством $\mathscr{X}$ исходов, сколько размерностью интервальной модели, определяемой числом первичных средних.

Голая модель. Пусть первичным для ИМ является единственный факт: событие B является достоверным, и более ничего. Это соответствует первичной вероятности $\underline{P}(B)=1$ (или же $P(B)=1$, что то же самое). Такая модель называется *B-индикаторной* и обозначается $\mathscr{I}_B$. Ее описывают средние $\overline{M}f(x)=\sup\limits_{x\in B} f(x)$, а область существования составляет класс всех признаков, ограниченных сверху при $x \in B$.

Если $B=\mathscr{X}$, то модель называется *голой* и обозначается $\mathscr{I}$. Она описывается средними $\overline{M}f=\sup f$, и ей соответствует полное отсутствие данных о явлении, а область существования составляет класс $\mathscr{F}_0$ всех ограниченных сверху признаков.

Модифицированная формула продолжения. Замена первичных признаков $g_i \in \mathscr{G}$ и их средних $\widetilde{M}g_i$ (приведенных к верхним) на $g'_i(x)=c^+_i g_i(x)+c$ и на $\widetilde{M}g'_i=c^+_i\widetilde{M}g_i+c$, очевидно, носит эквива-

лентный характер. Центрируем первичные признаки, заменив g_i на $\mathring{g}_i(x)=g_i(x)-\widetilde{M}g_i$, и тогда $\widetilde{M}\mathring{g}_i=0$. *Центрированный* набор признаков обозначим $\mathring{\mathscr{G}}$ и $\widetilde{M}\mathring{\mathscr{G}}=0$ — все нулевые первичные значения. Для этого набора (1.2) преобразуется:

$$\overline{M}f=\inf\{[c+\sum c_i^+\widetilde{M}\mathring{g}_i]:\quad c+\sum c_i^+\mathring{g}_i(x)\geqslant f(x)\}=$$

$$=\inf\{c: c\geqslant f(x)-\sum c_i^+\mathring{g}_i(x)\}=$$

$$=\inf_{c_i^+}\sup_x[f(x)-\sum c_i^+\mathring{g}_i(x)]. \qquad (1.3)$$

Очевидно, любой вторичный признак вида $\mathring{g}(x)=\sum c^+_i\mathring{g}_i(x)$ центрирован, т. е. его первичное верхнее среднее $\widetilde{M}\mathring{g}=0$ и, наоборот, любой центрированный признак представляется в указанном виде. Поэтому смысл формулы (1.3) состоит в отыскании такого из вторичных центрированных признаков, который наименьшим образом отклоняется вверх от функции $f(x)$, т. е. наилучшей, что ли, верхней аппроксимации функции $f(x)$ центрированными вторичными признаками. Вычисления по (1.3) поясним примером.

Пример 1.6. Пусть случайная величина (т. е. $\mathscr{X}=\mathcal{R}$) задана одним первичным значением $\widetilde{M}e^{-|X|}=\mu$. Требуется найти $\overline{P}(0\leqslant X\leqslant d)$. Задача по (1.3) сводится к нахождению величины $\overline{P}(0\leqslant X\leqslant d)=\min\limits_{c+}\max\limits_{X}[\{0\leqslant X\leqslant d\}-c^+(e^{-|X|}-\mu)]=\min\limits_{c+}\max\{1-c^+(e^{-d}-\mu),\ c^+\mu\}$ (для наглядности советуем нарисовать графики функций). Пусть $e^{-d}<\mu$, тогда минимум достигается при равенстве обеих частей под знаком максимума, откуда $c^+=e^d$, $\overline{P}(0\leqslant X\leqslant d)=e^d\mu$. При $e^{-d}\geqslant\mu$ минимум достигается при $c^+=0$, и тогда искомая вероятность равна 1.

Дополнения.

1. В область существования $\mathscr{F}$ полагались входящими признаки с $\overline{M}f=-\infty$. Интервальную модель можно полагать заданной на всех признаках f, назначая для тех f, для которых $\overline{M}f$ не существует, среднее равным бесконечности: $\overline{M}f=\infty$; аналогично $\underline{M}f=-\infty$ для f, у которых нет нижнего среднего. Аксиомы ИМ в этом случае в общем удовлетворяются, если считать $0\cdot\infty=0$ и учесть, что класс всех функций не замкнут относительно операции сложения, так как если $f(x_0)=\infty$, $g(x_0)=-\infty$ при некотором x_0, то совершенно неясно, чему будет равно $f(x_0)+g(x_0)=\infty-\infty$. Целесообразно аксиому **А3** считать выполненной только для тех признаков, для которых сложение определено.

2. Если первичными являются как нижние средние $\underline{M}g$, $g\in\mathscr{G}_н$, так и верхние $\widetilde{M}g'$, $g'\in\mathscr{G}_в$, то вторичными признаками будут всевозможные конечные линейные комбинации вида

$$g(x)=c+\sum c_i^+g'_i(x)-\sum d_i^+g_i(x),\ g'_i\in\mathscr{G}_в,\quad g_i\in\mathscr{G}_н,$$

с произвольным коэффициентом c и неотрицательными $c^+{}_i$ и $d^+{}_i$. Формула продолжения (1.2) тогда примет вид

$$\overline{M}f = \inf \left\{ \left[c + \sum c_i^+ \widetilde{M} g_i' - \sum d_i^+ \underset{\sim}{M} g_i \right] : \quad c + \sum c_i^+ g_i'(x) - \right.$$
$$\left. - \sum d_i^+ g_i(x) \geqslant f(x) \right\},$$

а (1.3) записывается в виде

$$\overline{M}f = \inf_{c_i^+,\, d_i^+} \sup_x \left[f(x) - \sum c_i^+ \left(g_i'(x) - \widetilde{M} g_i' \right) + \sum d_i^+ \left(g_i(x) - \underset{\sim}{M} g_i \right) \right],$$

где $g_i \in \mathscr{G}_н$, $g'_i \in \mathscr{G}_в$.

3. Полагая $\mathscr{G} = \mathscr{G}_н \cup \mathscr{G}_в$, всегда можно сделать так, чтобы на $\mathscr{G}$ были заданы интервалы средних $\underset{\sim}{M}g$, $\widetilde{M}g$, $g \in \mathscr{G}$. Для этого незаданные средние заменяются на соответствующие экстремальные значения функции g. Тогда вторичными будут всевозможные конечные линейные комбинации — линейная оболочка $\mathscr{G}$, обозначаемая $\mathscr{L}\mathscr{G} = \{g(x) = c + \sum c_i g_i(x)\}$, где $g_i \in \mathscr{G}$, а c и c_i произвольны. Формула продолжения средних запишется в виде

$$\overline{M}f = \inf \left\{ \left[c + \sum \widetilde{M} c_i g_i \right] : c + \sum c_i g_i(x) \geqslant f(x) \right\},$$
$$\overline{M}f = \inf_{c_i} \sup_x \left[f(x) - \sum \left(c_i g_i(x) - \widetilde{M} c_i g_i \right) \right],$$

где $\widetilde{M} c_i g_i = c_i \widetilde{M} g_i$ при $c_i > 0$ и $\widetilde{M} c_i g_i = c_i \underset{\sim}{M} g_i$ при $c_i < 0$.

4. В формуле продолжения класс $\mathscr{L}^+\mathscr{G}$ по свойству **13** вполне может быть заменен на его замыкание $[\mathscr{L}^+\mathscr{G}]$ относительно равномерной сходимости. В этот класс кроме конечных полулинейных комбинаций функций из $\mathscr{G}$ входят их равномерно сходящиеся пределы. Сказанное имеет, конечно же, нетривиальный смысл лишь тогда, когда набор $\mathscr{G}$ бесконечный, иначе $\mathscr{L}^+\mathscr{G}$ и его замыкание совпадают.

5. Формулы продолжения аналогичны формулам двойственности, используемым в теории обобщенных чебышевских неравенств [17]. Только работают они здесь в другой аксиоматике.

6. То что вторичные признаки являются конечными суммами первичных, а не бесконечными, — это принципиальное в нашей теории «нежелание» добавлять «лишних» аксиом, ибо не доказуемо, что сумма бесконечного (счетного) числа нулей, рассматриваемая в целом, а не как предел, есть ноль.

7. Каждый признак $f(x)$ сам по себе есть с. в., поэтому ИМ $\langle \overline{M}\mathscr{F} \rangle$ можно рассматривать как совокупность согласованных средних значений всевозможных с. в., определенных на пространстве $\mathscr{X}$. Набор признаков g_τ, $\tau \in \mathrm{T}$, в совокупности дает случайный вектор, если T дискретно, или процесс, если непрерывно.

8. Тот факт, что ИМ определяется средними $\overline{M}f$ необозримого множества $\mathscr{F}$ признаков, не является помехой применения. Возможность вычисления $\overline{M}f$ по (1.2) отнюдь не означает, что для каждой f эти вычисления должны быть проделаны. Совсем наоборот, как далее будет видно, нет нужды в прикладных задачах выходить за рамки вторичных признаков.

9. Введение любых свойств непрерывности средних, не следующих прямо из аксиоматики, выделяет подкласс моделей из общего их ансамбля, равно как другие дополнительные свойства.

10. Начальные моменты. Задают с. в., если первичными для нее являются средние степенных функций: $\underset{\sim}{M}X^j$, $\widetilde{M}X^j$, $j \in J$, где J — набор целочисленных неотрицательных индексов. Средние $\underset{\sim}{M}X^j$ называются нижними моментами j-го порядка, а $\widetilde{M}X^j$ — верхними. Первый момент $\underset{\sim}{M}X$, $\widetilde{M}X$ называется нижним и верхним средним самой с. в., а $\underset{\sim}{M}X^2$, $\widetilde{M}X^2$ нижней и верхней мощностью.

Абсолютными начальными моментами называются моменты модуля с. в. $\underset{\sim}{M}|X|^j$, $\widetilde{M}|X|^j$, $j>0$. Очевидно, при целых четных неотрицательных j это есть просто начальные моменты. В общем, j может не быть целым. Для абсолютных моментов, если они согласованы, должны выполняться неравенства: при $r \geqslant s \geqslant 0$

$$(\widetilde{M}\,|X|^r)^{1/r} \geqslant (\widetilde{M}\,|X|^s)^{1/s}, \quad (\underset{\sim}{M}|X|^r)^{1/r} \geqslant (\underset{\sim}{M}|X|^s)^{1/s}$$

(доказывается по аналогии с [1], стр. 169).

1.3. ОТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ИНТЕРВАЛЬНЫМИ МОДЕЛЯМИ

Здесь интервальные модели геометрически изображаются как некоторые выпуклые «тела» с характерным внешним контурным описанием, отношениями включения и операциями объединения и пересечения. Причем, так как ИМ полностью определяется своими средними, через них только и будем вводить ниже формальные отношения и операции между ИМ.

Геометрическая иллюстрация ИМ. Пусть возможных элементарных исходов конечное число: $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_r\}$, и введем вектор вероятностей $\mathbf{P} = (p_1, \ldots, p_r)$. Так как $\sum p_i = 1$, то размерность $\mathbf{P}$ на 1 меньше числа исходов r. Множество всех $\mathbf{P}$ обозначим

$$\mathscr{I} = \left\{ \mathbf{P} : p_i \geqslant 0, \ \sum_{i=1}^{r} p_i = 1 \right\}.$$

Это есть подмножество r-мерного эвклидова пространства $\mathscr{R}^r$. На рис. 1.4 при $r=3$ этим семейством является треугольник.

Для каждого фиксированного $\mathbf{P} \in \mathscr{I}$ среднее значение признака $f(x)$, он же вектор $f = (f(x_1), \ldots, f(x_r))$, равно скалярному произведению f на $\mathbf{P}$:

$$M_{\mathbf{P}} f = \sum_{i=1}^{r} f(x_i)\, p_i.$$

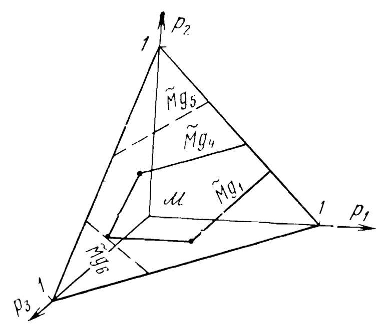


Рис. 1.4. Геометрия ИМ

Пусть $\mathscr{M}_0$ — семейство векторов, $\mathscr{M}_0 \subset \mathscr{I}$. Тогда средние не будут уже точными, а для каждого f будут определяться своими границами

$$\underline{M}f = \inf_{\mathbf{P} \in \mathscr{M}_0} M_{\mathbf{P}} f, \quad \overline{M}f = \sup_{\mathbf{P} \in \mathscr{M}_0} M_{\mathbf{P}} f.$$

Убедимся в том, что так определенные нижние и верхние средние удовлетворяют аксиомам ИМ:

$$\mathbf{A1}: g(x_i) \geqslant f(x_i) \Rightarrow M_\mathbf{P} g \geqslant M_\mathbf{P} f, \quad \forall \mathbf{P} \Rightarrow \overline{M} g \geqslant \overline{M} f.$$

$$\mathbf{A2}: \overline{M}(b+f+c) = \sup_{\mathbf{P}\in\mathscr{M}_0} b + M_\mathbf{P} f + c = b + \overline{M} f + c.$$

$$\mathbf{A3}: \overline{M}(f+g) = \sup_{\mathbf{P}\in\mathscr{M}_0} (M_\mathbf{P} f + M_\mathbf{P} g) \leqslant \sup_{\mathbf{P}\in\mathscr{M}_0} M_\mathbf{P} f + \sup_{\mathbf{P}\in\mathscr{M}_0} M_\mathbf{P} g =$$

$$= \overline{M} f + \overline{M} g.$$

$$\mathbf{A4}: -\underline{M} f = -\inf_{\mathbf{P}\in\mathscr{M}_0} M_\mathbf{P} f = \sup_{\mathbf{P}\in\mathscr{M}_0} M_\mathbf{P}(-f) = \overline{M}(-f).$$

Средние не изменятся, если семейство $\mathscr{M}_0$ заменить на его выпуклую оболочку — «тело» векторов **P**. Это и будет ИМ $\mathscr{M}$.

Таким образом, любое выпуклое «тело» $\mathscr{M}$ векторов вероятностей образует ИМ на дискретном пространстве $\mathscr{X}$. И наоборот, любой ИМ соответствует выпуклое «тело» $\mathscr{X}$. Как оно получается?

С каждым средним $\overline{M}f$ связывается полупространство векторов **P**, удовлетворяющее условию $M_\mathbf{P} f \leqslant \overline{M} f$, т. е. окаймленное с одной стороны гиперплоскостью **P**: $M_\mathbf{P} f = \overline{M} f$. Вид f дает направление гиперплоскости, а значение $\overline{M}f$ — ее положение. Модель как совокупность $\overline{M}f$, $f\in\mathscr{F}$, есть пересечение соответствующих разным $\overline{M}f$ полупространств, образующих выпуклое тело $\mathscr{M}$. Сами значения средних $\overline{M}f$ дают положения касающихся $\mathscr{M}$ гиперплоскостей.

Первичные средние $\tilde{M}g_i$, $i=1, ..., k$, определяют исходные первичные гиперплоскости **P**: $M_\mathbf{P} g_i = \tilde{M} g_i$, задающие внешний вид $\mathscr{M}$. Если их число конечно, то ИМ будет многогранником $\mathscr{M}_k$ (как это видно из рис. 1.4), грани которого составляют согласованные значения $\tilde{M}g_i = \overline{M}g_i$. Несогласованные же, такие как $\tilde{M}g_5$, проходят вне $\mathscr{M}$ и никакого влияния не оказывают. Есть гиперплоскости **P**: $M_\mathbf{P} g = \overline{M} g$, которые проходят через вершины многогранника $\mathscr{M}$, но не совпадают ни с одной из его граней, как $\tilde{M}g_6$. Хотя они и согласованы, но их исключение также не повлияет на вид $\mathscr{M}$, и в этом смысле они избыточны. Удаление всех избыточных элементов из первичного набора наглядно представляется лишь при конечном числе первичных признаков, и может стать непреодолимым при бесконечном. Сказанное относится не только к дискретным, но и к произвольным $\mathscr{X}$.

Число элементов безызбыточного первичного набора составляет *размерность* ИМ. Интервальные модели бывают конечной и бесконечной размерностей. В первом случае — это число граней многогранника $\mathscr{M}$, за исключением тривиальных, совпадающих с гранями $\mathscr{I}$.

Размерность ИМ характеризует тот минимальный объем данных, который нужен для ее задания. Конечно же, для практического применения целесообразными являются именно наборы из

конечного числа данных. Интервальные модели бесконечной размерности — это выпуклые тела, контуры которых задаются бесконечным числом касательных гиперплоскостей.

Обсуждение. Теперь следует остановиться, чтобы обсудить смысл принятого подхода. Что лучше, описывать ИМ «телом» $\mathscr{M}$ как множеством векторов **P** вероятностей, своего рода «атомов» модели, или только внешними контурами, т. е. $\overline{M}g$, $g\in\mathscr{G}$? Если $\mathscr{X}$ состоит из небольшого числа элементов, то, по-видимому, и так, и так, принципиального различия нет. Но если число элементов $\mathscr{X}$ растет, то также растет и размерность **P**, все мельче становятся атомы модели. Описание **P** несоразмерно усложняется при переходе к бесконечному числу исходов, в частности, к непрерывному пространству $\mathscr{X}$, например числовой прямой (и еще более — к процессам X_t). Тогда «атомы» и вовсе исчезают: становятся недосягаемыми. Для задания **P** приходится прибегать ко всевозможным ухищрениям, обсуждаемым в следующем параграфе. В то же время контурное описание, т. е. описание первичными параметрами, от «атомов» **P** никак не зависит, да и определяется, минуя **P**. Здесь все зависит от числа граней (размерности ИМ) и их положения (вида $g_i\in\mathscr{G}$), но отнюдь не от пространства $\mathscr{X}$. Почти как в геометрии: неважно, чем начинено тело, какой оно материи, а важно лишь внешнее его строение и пропорции.

Иерархия моделей. Для двух ИМ $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ на $\mathscr{X}$, если $\overline{M}_1 f \leqslant \leqslant \overline{M}_2 f$, $\forall f$, то будем говорить, что $\mathscr{M}_1$ *включается* в $\mathscr{M}_2$ и писать $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$. В указанном неравенстве, если f не ограничена сверху и $\overline{M}f$ для нее не существует, то формально считаем его бесконечным. Необходимым условием включения $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$ является то, что область существования $\mathscr{F}_1$ средних $\overline{M}_1 f$ должна быть не у́же области $\mathscr{F}_2$ существования $\overline{M}_2 f$: $\mathscr{F}_1 \supset \mathscr{F}_2$. Включение иллюстрируется рис. 1.5 как включение «тела» $\mathscr{M}_1$ в $\mathscr{M}_2$. Будем говорить также, что $\mathscr{M}_1$ более узкая, чем $\mathscr{M}_2$, а $\mathscr{M}_2$ — более широкая.

Добавление первичных параметров отсекает новые грани у «фигуры» $\mathscr{M}$ и приводит к ее сужению. К сужению приводит и уточнение средних: для $\overline{M}f$ — это уменьшение, а для $\underline{M}f$ — увеличение, поэтому включение $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$ соответствует тому, что в $\mathscr{M}_1$ вложено больше данных или же они более точные. В результате $\mathscr{M}_1$ более подробная, чем $\mathscr{M}_2$.

Самой широкой среди всех является *голая* модель (на рис. 1.4 — это множество $\mathscr{I}$ всех векторов вероятностей), определяемая средними $\overline{M}f = \sup f$, $f\in\mathscr{F}_0$, на всех ограниченных сверху признаках и обозначаемая $\mathscr{I}$. Она получается, если никаких данных — «одежд», отличающих одну ИМ от другой, нет, они отсутствуют: $\mathscr{G}\equiv 0$, т. е. о явлении ничего неизвестно — своего рода «черный ящик» с абсолютно загадочной структурой, выход которого x наблюдается. Для $\mathscr{I}$ интервал средних $\underline{M}f$, $\overline{M}f$ каждого ограниченного признака $f\in\mathscr{F}_{00}$ совпадает с диапазоном $\inf f$, $\sup f$ его возможных значений.

Итак, самой неточной среди всех, включающей все остальные, и самой примитивной по способу задания и своей структуре является голая ИМ: $\mathcal{I}\supset\mathcal{M}$, $\forall\mathcal{M}$. Мы говорим, что какое-то x из $\mathcal{X}$ произойдет, не зная никаких закономерностей.

По мере накопления данных ИМ сужается. А существуют ли самые узкие ИМ? Для дискретного пространства $\mathcal{X}$ — да, это векторы **P** вероятностей. А в общем, ответ отрицательный, о чем говорилось в обсуждении выше.

Потребность логической замкнутости иерархического класса всех моделей приводит к необходимости введения *пустой модели* $\varnothing$. Это обозначение неправильного задания ИМ, когда первичные значения $\tilde{M}g$ противоречивы, в результате границы среднего, формально найденные по формуле продолжения (1.2), будут не только «перепутаны»: нижняя больше верхней, но и убегают в бесконечности: $\underline{M}f=\infty$, $\overline{M}f=-\infty$. Этими средними на $\forall f$ и считаем определенную $\varnothing$ — единственную ИМ, своей несогласованностью выходящую из ансамбля всех остальных. Так как для любой ИМ $\underline{M}f\geqslant-\infty$, $\overline{M}f\leqslant\infty$, то $\varnothing\subset\mathcal{M}$, $\forall\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{Q}$ — набор признаков. Назовем *$\mathcal{Q}$-расширением* $\mathcal{M}$ такую модель $\langle\overline{M}\mathcal{Q}\rangle$, у которой первичными являются соответствующие $\mathcal{M}$ значения $\overline{M}q$, $q\in\mathcal{Q}$ (они, очевидно, согласованы). Расширение иллюстрируется рис. 1.5. Это способ упрощения $\mathcal{M}$ за счет включения ее в многогранник со сторонами $\overline{M}q$, $q\in\mathcal{Q}$ — новыми первичными данными — и пренебрежения всеми остальными знаниями о $\mathcal{M}$. Конечно, чтобы не потерять при расширении слишком много, нужно специально выбирать направления граней (вид q), и целая проблема, какие грани экономно будет ввести, какие оставить и сколько их.

Набор $\mathcal{Q}$ признаков называется *определяющим* для модели $\mathcal{M}$, если ее $\mathcal{Q}$-расширение совпадает с самой моделью: $\langle\overline{M}\mathcal{Q}\rangle=\mathcal{M}$. Определяющие — это те признаки, которые в своей совокупности полностью обеспечивают ИМ всем необходимым. Ясно, что определяющим для ИМ всегда является набор $\mathcal{G}$ первичных признаков (или безызбыточный вариант этого набора), а тем более любой включающий $\mathcal{G}$ класс признаков, например вторичных.

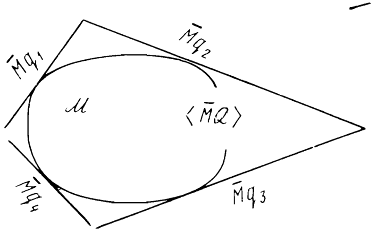


Рис. 1.5. Расширение ИМ бесконечной размерности до ИМ с четырьмя первичными значениями

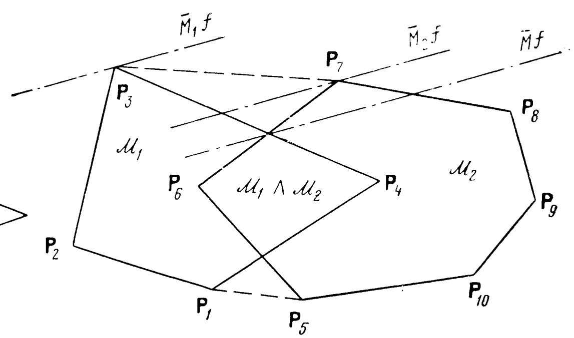


Рис. 1.6. Пересечение и объединение ИМ

Пересечение ИМ. Пусть $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ — две ИМ на одном и том же (произвольном) пространстве $\mathcal{X}$ и каждая из них полностью определяется своими согласованными средними $\overline{M}_1 f$, $f\in\mathcal{F}_1$ и $\overline{M}_2 f$, $f\in\mathcal{F}_2$, на областях $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ соответственно.

Пересечением $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ называется ИМ $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\wedge\mathcal{M}_2$, определяемая средними $\tilde{M}f=\min\{\overline{M}_1 f,\ \overline{M}_2 f\}$, $\forall f\in\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$. Здесь волнистая черта означает, что $\tilde{M}f$, во-первых, могут оказаться несогласованными между собой, так как не выполняется аксиома **А3** полуаддитивности, и тогда должны подвергнуться согласованию. Это видно из рис. 1.6, где штриховой линией означены касательные, соответствующие средним $\overline{M}_1 f$, $\overline{M}_2 f$ и $\overline{M}f$, $\overline{M}f<\tilde{M}f=\min\{\overline{M}_1 f,\ \overline{M}_2 f\}$. А во-вторых, $\tilde{M}f$ продолжаются по формуле (1.3) на класс $\mathcal{L}^+(\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2)$ признаков, составленных из полулинейных комбинаций $\mathcal{F}_1$ вместе с $\mathcal{F}_2$.

Пересечение означает, что верными являются данные, содержащиеся как в $\mathcal{M}_1$, так и в $\mathcal{M}_2$, и из них берутся наиболее точные. В результате сужаются как интервальные средние, так и ИМ: $\mathcal{M}_1\wedge\mathcal{M}_2\subset\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1\wedge\mathcal{M}_2\subset\mathcal{M}_2$ (см. рис. 1.6).

Первичными средними (гранями) пересечения будут первичные средние (грани) $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ и никакие другие, поэтому пересечение $\langle\tilde{M}_1\mathcal{G}_1\rangle\wedge\langle\tilde{M}_2\mathcal{G}_2\rangle=\langle\tilde{M}(\mathcal{G}_1\cup\mathcal{G}_2)\rangle$ равносильно сложению двух первичных наборов между собой в единый $\mathcal{G}_1\cup\mathcal{G}_2$ с сохранением первичных значений, из которых некоторые оказываются несогласованными и не влияют на вид пересечения. Областью существования пересечения будет $\mathcal{L}^+(\mathcal{F}_{\mathcal{G}_1}\cup\mathcal{F}_{\mathcal{G}_2})$.

Операция пересечения распространяется на произвольное число $\mathcal{M}_\theta=\langle\overline{M}_\theta\mathcal{F}_\theta\rangle$, $\theta\in\Theta$:

$$\mathcal{M}=\bigwedge_{\theta\in\Theta}\mathcal{M}_\theta\Leftrightarrow\tilde{M}f=\inf_{\theta\in\Theta}\overline{M}_\theta f,\quad\forall f\subset\mathcal{L}^+(\bigcup_\theta\mathcal{F}_\theta).$$

Используем этот факт.

Пример 1.7. Представление ИМ пересечением. Любую ИМ $\langle\tilde{M}\mathcal{G}\rangle$ можно представить в виде пересечения

$$\langle\tilde{M}\mathcal{G}\rangle=\bigwedge_{g\in\mathcal{G}}\langle\tilde{M}g\rangle$$

моделей $\langle\tilde{M}g\rangle$ размерности 1, определенные каждая одним первичным значением $\tilde{M}g$ признака g, заменяющего индекс θ. Тогда $\mathcal{F}_g=\mathcal{F}_\theta$ составляют признаки, мажорируемые g, а $\mathcal{L}^+(\cup\mathcal{F}_g)=\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ — их полулинейные комбинации.

Объединение ИМ. Пусть $\mathcal{M}_\theta=\langle\overline{M}\mathcal{F}_\theta\rangle$, $\theta\in\Theta$ — семейство ИМ на $\mathcal{X}$, индексированных параметров θ, пробегающим множество Θ. Определим их объединение (обозначается $\vee$) следующим образом:

$$\mathcal{M}=\bigvee_{\theta\in\Theta}\mathcal{M}_\theta\Leftrightarrow\overline{M}f=\sup_{\theta\in\Theta}\overline{M}_\theta f,\quad\forall f\in\bigcap_\theta\mathcal{F}_\theta.$$

Здесь средние $\overline{M}f$, полученные максимизацией $\overline{M}_\theta f$ по θ, согласованы, что легко проверяется и что иллюстрируется рис. 1.6, где объединение обведено штриховкой и соответствует выпуклой оболочке тел $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$. Как видно из рис. 1.6, при объединении рождаются новые грани (первичные признаки), обозначенные штриховыми линиями, не совпадающими с гранями $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$, изображенными сплошными. При этом грани объединения не будут выходить за рамки линейной оболочки граней составляющих, т. е., если быть более строгими, при $\mathscr{M}_1=\langle \widetilde{M}_1\mathscr{G}_1\rangle$ и $\mathscr{M}_2=\langle \widetilde{M}_2\mathscr{G}_2\rangle$ первичные признаки объединения будут располагаться в классе $\mathscr{L}^+(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2)$.

Операция объединения $\mathscr{M}_1\vee\mathscr{M}_2$ — символическое отражение фразы: «Верна (правильно отражает явление) модель $\mathscr{M}_1$ или $\mathscr{M}_2$». Это сомнение, неуверенность, ведущая к расширению ИМ.

Пример 1.8. Представление ИМ объединением «вершин». Пусть пространство исходов $\mathscr{X}$ дискретно. Каждой ИМ конечной размерности можно указать вершины $\mathbf{P}_i$ — векторы вероятностей. На рис. 1.6 для $\mathscr{M}_1$ — это $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ и $\mathscr{M}_1$ является их оболочкой. При объединении двух ИМ вершины будут выбираться из вершин $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$. Никакие другие появиться не могут. Для ИМ любой размерности, когда $\mathscr{M}_1=\bigvee_\theta \mathbf{P}_{1\theta}$ есть оболочка некоторого семейства векторов $\mathbf{P}_{1\theta}$, задающих тело $\mathscr{M}_1$ (или только его контуры), и аналогично $\mathscr{M}_2=\bigvee_\vartheta \mathbf{P}_{2\vartheta}$, верно $\mathscr{M}_1\vee\mathscr{M}_2=\bigvee_\theta \mathbf{P}_{1\theta}\bigvee_\vartheta \mathbf{P}_{2\vartheta}$, т. е. производится объединение этих семейств в одно. Причем достаточно ограничиться теми элементами семейств, которые при объединении оказываются крайними (не входят в выпуклые оболочки других).

Свойства операций.

1. Идемпотентность: $\mathscr{M}\wedge\mathscr{M}=\mathscr{M}$, $\mathscr{M}\vee\mathscr{M}=\mathscr{M}$.
2. Коммутативность: $\mathscr{M}_1\wedge\mathscr{M}_2=\mathscr{M}_2\wedge\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_1\vee\mathscr{M}_2=\mathscr{M}_2\vee\mathscr{M}_1$.
3. Ассоциативность: $(\mathscr{M}_1\wedge\mathscr{M}_2)\wedge\mathscr{M}_3=\mathscr{M}_1\wedge(\mathscr{M}_2\wedge\mathscr{M}_3)$, $(\mathscr{M}_1\vee\mathscr{M}_2)\vee\mathscr{M}_3=\mathscr{M}_1\vee(\mathscr{M}_2\vee\mathscr{M}_3)$.
4. $\mathscr{M}\wedge\mathscr{I}=\mathscr{M}$, $\mathscr{M}\vee\mathscr{I}=\mathscr{I}$.
5. $\mathscr{M}\wedge\varnothing=\varnothing$, $\mathscr{M}\vee\varnothing=\mathscr{M}$.

Эти свойства доказываются элементарно и распространяются на любое число операций. Очевидно также, что

$$\mathscr{M}_1\subset\mathscr{M}_2\Rightarrow\mathscr{M}_1\wedge\mathscr{M}_2=\mathscr{M}_1,\ \mathscr{M}_1\vee\mathscr{M}_2=\mathscr{M}_2.$$

Отсюда получается сразу же такое известное в алгебре свойство.

6. Закон поглощения:
$(\mathscr{M}_1\wedge\mathscr{M}_2)\vee\mathscr{M}_1=\mathscr{M}_1$, $(\mathscr{M}_1\vee\mathscr{M}_2)\wedge\mathscr{M}_1=\mathscr{M}_1$
(так как $\mathscr{M}_1\wedge\mathscr{M}_2\subset\mathscr{M}_1$, $\mathscr{M}_1\vee\mathscr{M}_2\supset\mathscr{M}_1$). Это есть замена привычного для булевских алгебр свойства дистрибутивности, которое для наших операций не выполняется. Причина в том, что объединение $\vee$ ИМ не обычное множественное, всем привычное, а выпуклое, так как в результате должны образоваться снова ИМ, которые по своей природе выпуклы. И, как следствие, невозможность определить дополнение к ИМ (или противоположную ИМ), так как к выпуклому телу дополнение не будет выпуклым.

Дополнения.

1. Для дискретных пространств $\mathscr{X}$ формула (1.2) вытекает из формулы двойственности линейного программирования, когда по ограничениям

$$\sum_{i=1}^{r} p_i=1,\quad \sum_{i=1}^{r} g_{ji}\,p_i\leqslant \widetilde{M}g_j,\quad j=1,\dots,k,$$

находится максимум линейных форм $\overline{M}f=\max\limits_{\mathbf{P}}\sum_{i=1}^{r} f_ip_i$.

2. Операции над моделями могут быть определены, если ИМ заданы на разных пространствах исходов: $\mathscr{M}_1$ — на $\mathscr{X}_1$, а $\mathscr{M}_2$ — на $\mathscr{X}_2$. Тогда составляется их объединение $\mathscr{X}=\mathscr{X}_1\cup\mathscr{X}_2$ и $\mathscr{M}_1$ дополняется первичным значением $\mathbf{P}_1(\mathscr{X}_1)=1$, а $\mathscr{M}_2$ — значением $\mathbf{P}_2(\mathscr{X}_2)=1$. В результате $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ сводятся к одному $\mathscr{X}$ со всеми вытекающими отсюда возможностями.

3. Если говорится, что явление с исходами $\mathscr{X}$ описывается семейством моделей $\mathscr{M}_\theta$, $\theta\in\Theta$, то это фактически означает, что моделью является объединение $\bigvee_\theta \mathscr{M}_\theta$.

4. Содержащееся в примере 1.8 представление ИМ как объединение вершин не является универсальным в силу невозможности для произвольных пространств $\mathscr{X}$ отделения «атомов» $\mathbf{P}$ модели.

1.4. ИНТЕРВАЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Свойства интервальных вероятностей. Исторически сложилось, что в основу описания случайных явлений были положены вероятности, чем мы обязаны наглядности игровых примеров (монета, карты, кость), давших теории вероятностей начальный толчок и подпитывающих ее на протяжении развития. Эта же наглядность, а в дальнейшем отработанность и стройность теории привела и к фактическому игнорированию других подходов[1].

Наши интервальные модели в своем определении базируются на интервальных средних, а вероятностям — нижней $\underline{P}(A)$ и верхней $\overline{P}(A)$ отведена роль частного случая, когда признаками являются индикаторные функции $A(x)$ событий: $\underline{P}(A)=\underline{M}A(x)$; $\overline{P}(A)=\overline{M}A(x)$, $A\subset\mathscr{X}$. Для любой ИМ вероятности $\underline{P}(A)$, $\overline{P}(A)$ определены для $\forall A$ (так как $A(x)\in\mathscr{F}_{00}$).

Свойства вероятностей непосредственно вытекают из согласованности средних (см. § 1.1). Обозначая знаком плюс $A+B$ и символом сумма $\sum A_i$ объединение непересекающихся событий (в отличие от общего обозначения объединения $\cup$), имеем:

1. $\underline{P}(\mathscr{X})=\overline{P}(\mathscr{X})=P(\mathscr{X})=1$ — пространство $\mathscr{X}$ является всегда достоверным событием (доказывается $M1=P(\mathscr{X})=1$).

2. Обращение вероятностей: $\underline{P}(A)=1-\overline{P}(A^c)$, где A^c — дополнение к событию A (так как $\underline{M}A(x)=1-\overline{M}(1-A(x))$.

[1] В [2] в основу теории положены точные средние, но они наделяются столь жесткими свойствами, что это полностью свело получаемые в результате модели к вероятностным.

3. Верхняя полуаддитивность: $AB=\varnothing \Rightarrow \overline{P}(A+B) \leqslant \overline{P}(A)+\overline{P}(B)$ (так как $\overline{M}[A(x)+B(x)] \leqslant \overline{M}A(x)+\overline{M}B(x)$).

4. Нижняя полуаддитивность: $AB=\varnothing \Rightarrow \underline{P}(A+B) \geqslant \underline{P}(A)+\underline{P}(B)$ (так как $\underline{M}[A(x)+B(x)] \geqslant \underline{M}A(x)+\underline{M}B(x)$).

Вероятности, удовлетворяющие этим свойствам, называются *согласованными*. Смысл слова «согласованность» в том, что если бы какое-нибудь свойство не выполнялось, то хотя бы одна какая-то граница вероятности могла бы быть уточнена за счет других, т. е. $\underline{P}(A)$ увеличена или $\overline{P}(A)$ уменьшена.

Из свойств согласованности вероятностей непосредственно вытекают следующие свойства:

5. $P(\varnothing)=0$ — вероятность пустого события нуль.

6. $\underline{P}(A) \leqslant \overline{P}(A)$ — нижняя вероятность всегда не больше верхней.

7. $AB=\varnothing \Rightarrow \underline{P}(A+B) \leqslant \underline{P}(A)+\overline{P}(B) \leqslant \overline{P}(A+B)$ (частный случай соответствующего свойства средних, который может быть доказан и на основе **1—4**).

8. Для конечного числа попарно непересекающихся событий $\overline{P}(\sum_1^k A_i) \leqslant \sum_1^k \overline{P}(A_i)$ (следует по индукции из **3**).

9. Для конечного или счетного числа попарно непересекающихся событий $\underline{P}(\sum A_i) \geqslant \sum \underline{P}(A_i)$. Для конечного числа A_i это свойство непосредственно следует из **4**, а для счетного — из

$$\underline{P}\left(\sum_1^\infty A_i\right) = \underline{P}\left(\sum_1^k A_i + \sum_{k+1}^\infty A_i\right) \geqslant \underline{P}\left(\sum_1^k A_i\right) + \underline{P}\left(\sum_{k+1}^\infty A_i\right) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_1^k \underline{P}(A_i)$$

предельным переходом в правой части при $k \to \infty$.

Свойство **8** развивает **3** и называется *конечной верхней полуаддитивностью* вероятностей. Свойство же **9** продолжает **4** не только на конечные, но и на счетные суммы и называется *нижней счетной полуаддитивностью*. Это более сильное свойство, поэтому нижняя вероятность по природе «более непрерывна», чем верхняя. Для верхней же свойство *счетной верхней полуаддитивности* верно лишь при дополнительном условии, составляющем левую часть следующего утверждения:

$$\textbf{10.}\quad \lim_{k\to\infty} \overline{P}\left(\sum_{k+1}^\infty A_i\right) = 0 \Rightarrow \overline{P}\left(\sum_1^\infty A_i\right) \leqslant \sum_1^\infty \overline{P}(A_i).$$

Для доказательства надо перейти к пределу при $k \to \infty$ в неравенстве

$$\overline{P}\left(\sum_1^k A_i + \sum_{k+1}^\infty A_i\right) \geqslant \sum_1^k \overline{P}(A_i) + \overline{P}\left(\sum_{k+1}^\infty A_i\right).$$

Пусть B_n, монотонно возрастая при $n \to \infty$, сходятся к B. Это записывается $B_n \uparrow B$ и означает, что $B_n \subset B_{n+1}$, $\forall n$, и для каждой

ч точки $x \in B$ с ростом n найдется такое B_n, которое все же x накроет. И тем не менее даже столь жестких требований сходимости событий недостаточно, чтобы гарантировать сходимость их вероятностей, что провозглашается следующим тезисом.

11. Вероятности в общем не являются непрерывными по отношению к монотонной сходимости событий. Это негативное свойство означает, что, имея $\underline{P}(B_n)$ и $\overline{P}(B_n)$ и зная, что $B_n \uparrow B$, тем не менее можно $\underline{P}(B)$ и $\overline{P}(B)$ брать отличными от пределов $\lim_{n\to\infty} \underline{P}(B_n)$ и $\lim_{n\to\infty} \overline{P}(B_n)$, не нарушив при этом свойства согласованности вероятностей. Покажем это на примере.

Пример 1.9. Пусть $B_n \uparrow B$, $B_n \neq B$ и первичными являются $\overline{P}(B_n)=p_1$, $\overline{P}(B)=p_2>p_1$. Тогда $\lim_{n\to\infty} \overline{P}(B_n)=p_1<p_2$. Здесь согласованность вероятностей не мешает задать p_2 отличным от p_1. Если же дополнить указанный набор еще одной первичной нижней вероятностью $\underline{P}(B)=p$, $0<p\leqslant p_2$, то так как ни в одно из B_n событие B не вкладывается, то $\underline{P}(B_n)=0$, и следовательно, $\lim_{n\to\infty} \underline{P}(B_n)=0$, тогда как $\underline{P}(B)=p>0$.

Продолжение первичных вероятностей. *Интервальным распределением вероятностей* (сокращенно ИРВ) называется ИМ, первичными для которой являются вероятности (точные или интервальные) набора событий. Первичными признаками ИРВ являются индикаторные функции $A(x)$ событий A первичного набора $\mathscr{A}$, и на них заданы вероятности в виде точных значений $P(A)$, интервалов $\underline{P}(A)$, $\overline{P}(A)$ или одной из границ, чаще верхней. Если нет нижней, то всегда можно положить ее равной 0, а не заданную $\overline{P}(A)$ считать равной 1. Это ничего не изменит, кроме того, что на всех событиях из $\mathscr{A}$ будут определены интервальные первичные вероятности, позволяя обозначение $\langle \underline{P}(\mathscr{A}), \overline{P}(\mathscr{A})\rangle$. Если же все первичные вероятности приведены к верхним, ИРВ обозначается $\langle \overline{P}(\mathscr{A})\rangle$.

Рассмотрим, как продолжить вероятности, перенеся их на средние любых признаков. Поскольку первичными признаками ИРВ являются события из $\mathscr{A}$, то вторичными будут всевозможные их конечные линейные комбинации: $\mathscr{L}\mathscr{A}=\{g(x)=c+\sum c_i A_i(x), A_i \in \mathscr{A}\}$, (вторичные, они же $\mathscr{A}$-измеримые, функции), где c и c_i — произвольные коэффициенты, и первичные значения переносятся на вторичные признаки по (1.1):

$$\breve{M}g = c + \sum \breve{M}c_i A_i(x), \quad \text{где} \quad \breve{M}c_i A_i = \begin{cases} c_i \overline{P}(A_i) & \text{при } c_i > 0, \\ c_i \underline{P}(A_i) & \text{при } c_i < 0. \end{cases}$$

Это первый шаг, хотя и не однозначный, так как одно g может по-разному записываться через A_i (тогда берется минимальное из $\breve{M}g$ среди всевозможных записей).

Следующий шаг состоит в продолжении этих средних с их согласованием по (1.2) на любые ограниченные функции $f(x)$. Но это будет возможно только, если первичные вероятности непротиворечивы: $g \geqslant 0 \Rightarrow \tilde{M}g \geqslant 0,\ \forall g \in \mathscr{L}\mathscr{A}$. Тогда формула

$$\overline{M}f = \inf_{f(x) \leqslant g(x) \in \mathscr{L}\mathscr{A}} \tilde{M}g, \quad \forall f \in \mathscr{F}_0$$

дает согласованные значения средних на любых ограниченных сверху признаках. Класс $\mathscr{F}_0$ последних $\mathscr{A}$-мажорируем и потому будет естественной областью продолжения верхних средних всех ИРВ: $\mathscr{F}_{\mathscr{A}} = \mathscr{F}_0$. В частности, будут определены верхние вероятности $\bar{P}(B)$ (и через них нижние по свойству 2) для всех событий $\forall B \subset \mathscr{X}$, другое дело, что они могут оказаться для многих событий тривиальными, т. е. равными 1.

Желание распространить средние на неограниченные признаки (такие как x, x^k, $\operatorname{tg} x$ и т. д.) по подобию математических ожиданий дает оправдание третьему шагу, к которому и перейдем.

Предельное продолжение средних. Действуем строго по аналогии с интегрированием, помня, что интегрирование по вероятностной мере ведет к математическим ожиданиям. В теории интегрирования: а) первичными даются меры множеств, б) их значения присваиваются интегралам от индикаторных функций, в) далее эти интегралы распространяются по аддитивности на интегралы от всех простых функций (сумм индикаторов), г) затем продолжаются на интегралы от измеримых ограниченных функций, д) последние, наконец, переносятся на неограниченные. Последний шаг применительно к ИМ и составляет предмет нашего рассмотрения.

Усечем неограниченную функцию f снизу уровнем $-H_1$ и сверху уровнем H_2, обозначив

$$f^{(-H_1,\, H_2)}(x) = \begin{cases} -H_1, & f(x) < -H_1, \\ f(x), & -H_1 \leqslant f(x) \leqslant H_2, \\ H_2 & f(x) > H_2. \end{cases}$$

Функции $f^{-H_1,\, H_2}(x)$ ограничены и поэтому средние для них всегда определены. Положим для неограниченной функции

$$\overline{M}f = \lim_{H_1 \to \infty} \lim_{H_2 \to \infty} \overline{M}f^{(-H_1,\, H_2)}. \tag{1.4}$$

Собственно, так интуитивно и понимается всегда неограниченная функция как предел ее усеченного варианта при устремлении к бесконечности уровней усечения; естественно, в этом ключе следует понимать и средние. Важно, что сначала H_2 устремляется к ∞, так как в силу монотонности это дает наибольшее значение правой части, а затем уже H_1.

Для пределов (1.4) выполняются все аксиомы. Из них **А1—А3** доказываются с помощью неравенств:

1) $f \geqslant g \Rightarrow f^{(-H_1,\, H_2)} \geqslant g^{(-H_1,\, H_2)}$.

2) $b + f^{(-H_1,\, H_2)} + c = (b + f + c)^{(-b+H_1+c;\ b+H_2+c)}$;

3) $(f+g)^{(-H_1,\, H_2)} \leqslant f^{(-H_1/2,\ H_2+H_1/2)} + g^{(-H_1/2,\ H_2+H_1/2)}$,

в которых нужно взять $\overline{M}$ и перейти к пределам, сначала $H_2 \to \infty$, а затем $H_1 \to \infty$. Аксиома **А4** будет верна по определению. Причем, так как $(-f)^{(-H_1,\, H_2)} = -f^{(-H_2,\, H_1)}$, то $\underline{M}f = \lim\limits_{H_2 \to \infty} \lim\limits_{H_1 \to \infty} \underline{M}f^{(-H_1,\, H_2)}$.

В дальнейшем будем в основном иметь дело с верхними средними, оставляя нижнее «за кулисами» формулы обращения (аксиомы **А4**). Для заданной $\mathscr{M}$ обозначим $\mathscr{F}_\infty$ класс всех признаков. для которых существует и не равен ∞ предел (1.4): $\mathscr{F}_\infty = \{f : \overline{M}f < \infty\}$, назовем этот класс *предельной областью существования верхних средних* ИРВ, а соответствующую совокупности средних $\langle \overline{M}\mathscr{F}_\infty \rangle$ модель — *предельной* $\mathscr{M}_\infty$. Смысл продолжения (1.4) очень естествен: неограниченные признаки мыслятся как имеющие некоторый потолок, который безмерно высоко расположен (точно также понимается нами космическая бескрайность). И в обозримом диапазоне $(-H_1, H_2)$ вычисляется среднее, при увеличении H_i все более приближающее предельное значение.

Этой же точки зрения можно было придерживаться для любых ИМ, считая все неограниченные признаки, входящие в $\mathscr{F}$, имеющими некоторый общий потолок, столь недосягаемо высокий, что его в наших действиях просто удобно не замечать, оперируя «нижними» частями признаков. При такой интерпретации предельная ИМ $\mathscr{M}_\infty$ «уравнивается в правах» с построенной по первичным признакам согласно формуле продолжения.

Замечания.

1. Переход к пределу в (1.4) математически подразумевает непрерывность правой части при H_1, $H_2 \to \infty$, а это есть дополнительное свойство средних, ниоткуда из доказанного нами ранее не следующее. Если не принимать этого свойства, то можно было бы брать $\overline{M}f$ отличным от предела правой части (1.4), поэтому с формальных позиций предельная модель $\mathscr{M}_\infty$ есть форма сужения заданной $\mathscr{M} \supset \mathscr{M}_\infty$ по правилу, соответствующему (1.4).

2. Принцип предельного расширения области существования применим и к общему классу ИМ $\langle \tilde{M}\mathscr{G} \rangle$. Сначала средние с $\mathscr{G}$ распространяются по формуле продолжения (1.2) на мажорируемую набором $\mathscr{G}$ область $\mathscr{F}_{\mathscr{G}}$, в частности, на абсолютно ограниченные признаки $\mathscr{F}_{00} \subset \mathscr{F}_{\mathscr{G}}$ (если все $g \in \mathscr{G}$ ограничены, то $\mathscr{F}_{\mathscr{G}} = \mathscr{F}_0$). Затем предельным переходом (1.4) распространяются с $\mathscr{F}_{00}$ на $\mathscr{F}_\infty$. Линейная оболочка $\mathscr{L}^+(\mathscr{F}_{\mathscr{G}} \cup \mathscr{F}_\infty)$ и станет расширенной областью существования средних, переход к которой эквивалентен сужению модели $\langle \tilde{M}\mathscr{G} \rangle$ к предельной форме $\langle \tilde{M}\mathscr{G} \rangle_\infty$.

Иллюстрация ИРВ. Наглядно для дискретных пространств $\mathscr{X}$ ИРВ представляются многогранниками векторов **P** вероятностей, грани которых параллельны осям $P(x_i) = 0$, как это видно из рис. 1.7, где треугольник $\mathscr{Y}$, соответствующий голой ИМ, срисован с рис. 1.4. Здесь трапеция $\mathscr{M}_2$ определяется всего двумя первичными вероятностями: $P_2(x_1)$ — левая ее грань и $\bar{P}_2(x_2)$ — верхняя, т. е. имеет порядок $\tilde{2}$, тогда как $\mathscr{M}_1$ имеет шесть первич-

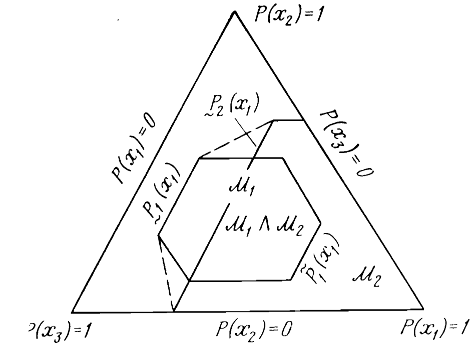


Рис. 1.7. Операция над ИРВ

ных граней, следовательно, шестого порядка. Пересечение двух ИРВ — снова ИРВ $\mathscr{M}_1\wedge\mathscr{M}_2$ и первичными будут вероятности, полученные сложением воедино между собой первичных вероятностей $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$, часть которых при согласовании окажется избыточной, так как проходят вне граней $\mathscr{M}_1\wedge\mathscr{M}_2$, как, например, $\tilde{P}_2(x_2)$ или $\underset{\sim}{P}_1(x_1)$ на рис. 1.7.

Объединение двух ИРВ, обведенное на рис. 1.7 штриховкой, формирует новые контурные грани, которые не параллельны сторонам $\mathscr{S}$, т. е. уже не соответствуют вероятностям, что переводит в рамки более общих конструкций ИМ. Таким образом, класс всех ИРВ не замкнут относительно операции объединения. Голое ИРВ, соответствующее полному отсутствию нетривиальных первичных вероятностей, есть то же самое, что голая ИМ.

Перейдем к рассмотрению некоторых частных случаев ИРВ.

Конечно-аддитивные ИРВ. Интервальная модель, для которой первичной является система непересекающихся событий, называется *конечно-аддитивным интервальным распределением вероятностей* (короче, Σ-ИРВ). Обозначим $\mathscr{A}_\Sigma=\{A_1, A_2, \ldots\}$, $A_iA_j=\varnothing$, $i\neq j$ — набор попарно непересекающихся событий и пусть заданы $\underset{\sim}{P}(A_j)$, $\tilde{P}(A_j)$, $j=1, 2, \ldots$ Хотя не требуется, чтобы объединение $\sum A_j$ охватывало все пространство $\mathscr{X}$, но удобно это считать, дополнив при необходимости исходный набор остаточным событием $A_0=(\sum A_j)^c$ (если оно не пустое) и придав ему в качестве первичного тривиальный вероятностный интервал $\underset{\sim}{P}(A_0)=0$; $\tilde{P}(A_0)=1$. Тогда $\mathscr{A}_\Sigma$ становится дроблением пространства $\mathscr{X}$ на непересекающиеся события, что далее и предполагается.

Непротиворечивость первичных вероятностей эквивалентна выполнению неравенств: $0\leqslant\underset{\sim}{P}(A_j)\leqslant\tilde{P}(A_j)$, $\underset{\sim}{P}(\mathscr{X})=\sum\underset{\sim}{P}(A_j)\leqslant1$, $\tilde{P}(\mathscr{X})=\sum\tilde{P}(A_j)\geqslant1$. Последнее условие требуется только, если дробление $\mathscr{A}_\Sigma$ конечно. В случае счетного дробления в нем нет надобности, так как несмотря на расширение $\sum_1^k A_j$ при увеличении k всегда будет оставаться место для остаточного события A_0, для которого полагаем $\tilde{P}(A_0)=1$, отсюда $\tilde{P}(\mathscr{X})\geqslant1$, где тильдой обозначена формально перенесенная с первичных вероятность $\mathscr{X}$.

Вторичными признаками будут всевозможные конечные линейные комбинации $g(x)=c+\sum c_jA_j(x)$, образующие линейный класс $\mathscr{L}\mathscr{A}_\Sigma$ функций. В него, в частности, входят так называемые *вторичные события* A_{J_k} — это те, которые набираются как объединения A_j: $A_{J_k}=\sum_{j\in J_k}A_j$, где J_k — конечный набор индексов. Для них $\underset{\sim}{P}(A_{J_k})=\sum_{i\in J_k}\underset{\sim}{P}(A_j)$, $\tilde{P}(A_{J_k})=\sum_{i\in J_k}\tilde{P}(A_j)$ — это перенесенные по аддитивности первичные вероятности (отсюда название: аддитивные ИРВ).

Уже говорилось о различии свойств **8** — верхней и **9** — нижней вероятностей. Это различие отражается и на перенесенных вероятностях, где также «лучшими» свойствами обладает нижняя вероятность. Проявляется это в том, что $\underset{\sim}{P}(A_J)$ могут быть по аддитивности распространены на суммы счетных множеств индексов J и это не повлияет на ИРВ. В самом деле, A_J при конечных поднаборах $J_k\subset J$ образуют внутренность, «фундамент» для A_J, так что $A_{J_k}\subset A_J$ и $\underset{\sim}{P}(A_{J_k})\leqslant\underset{\sim}{P}(A_J)$, $\forall k$, поэтому в качестве $\underset{\sim}{P}(A_J)$ можно взять максимальное значение левой части последнего неравенства, получаемое переходом к пределу $J_k\uparrow J$, что ведет к формуле счетного суммирования: $\underset{\sim}{P}(A_J)=\sum_{j\in J}\underset{\sim}{P}(A_j)$, где J счетно. В частности, если число событий в наборе $\mathscr{A}_\Sigma$ счетно, то дополнение $J^c{}_k$ к конечному J_k будет счетным множеством индексов и

$$\underset{\sim}{P}(A^c_{J_k})=\sum_{j\in J_k^c}\underset{\sim}{P}(A_j).$$

Формула счетного суммирования не распространяется на верхние вероятности, поскольку на счетном J для события A_J уже невозможно создать мажорирующую его «крышу» из конечного числа первичных событий.

Теорема 1.2. *Если первичные интервальные вероятности заданы на дроблении $\mathscr{A}_\Sigma$ пространства $\mathscr{X}$ на непересекающиеся события, то выражением*

$$\overline{P}(A_{J_k})=\min\{\tilde{P}(A_{J_k}),\quad 1-\underset{\sim}{P}(A^c_{J_k})\}\tag{1.5}$$

они продолжаются, делаясь согласованными, на все вторичные события. Продолжение на все вторичные признаки осуществляется формулами

$$\overline{M}\left(\sum c_jA_j\right)=\min_c\left[c+\sum_{c_j>c}(c_j-c)\tilde{P}(A_j)-\sum_{c_j<c}(c-c_j)\underset{\sim}{P}(A_j)\right],\tag{1.6}$$

причем минимум достигается при $c=c^*$, удовлетворяющем уравнению

$$\sum_{c_j>c^*}\tilde{P}(A_j)+\sum_{c_j<c^*}\underset{\sim}{P}(A_j)+\sum_{c_j=c^*}[\varkappa\tilde{P}(A_j)+(1-\varkappa)\underset{\sim}{P}(A_j)]=1$$

при однозначно существующем выборе $0\leqslant\varkappa\leqslant1$.

Доказательство вынесено в конец параграфа в дополнение 2.

Поясним формулу (1.5). Вероятность $\overline{P}(A_J)$ получается, с одной стороны, как сумма верхних вероятностей первичных событий, составляющих A_{J_k}, а с другой — данные об этой вероятности черпаются из оценки нижней вероятности противоположного события $A^c{}_{J_k}$. Берется то из двух значений, которое более точное, т. е. меньшее по величине.

Из формулы (1.6) среднее для всего класса $\mathscr{L}\mathscr{A}_\Sigma$ вторичных признаков получается сдвигом: $\overline{M}(c+\sum c_jA_j)=c+\overline{M}(\sum c_jA_j)$. Понятно также, что (1.5) выводится из (1.6), и отсюда же сумма по $\underline{P}(A_j)$ в конце правой части (1.6) допускается счетной.

Формула (1.6) становится нагляднее, если записать ее в виде

$$\overline{M}\left(\sum c_j A_j\right)=\sum_{c_j>c^*} c_j\overline{P}(A_j)+c^*P^*+\sum_{c_j<c^*} c_j\underline{P}(A_j),$$

где $P^*=1-\sum\limits_{c_j>c^*}\overline{P}(A_j)-\sum\limits_{c_j<c^*}\underline{P}(A_j)$. Тогда $\overline{M}\left(\sum c_j A_j\right)=\max\limits_{\mathbf{P}}\sum c_jP_j$. Максимум ищется по векторам $\mathbf{P}$ вероятностей с компонентами $P_j\in[\underline{P}(A_j),\ \overline{P}(A_j)]$ и достигается на векторе $\mathbf{P}^*$, компоненты $P^*{}_j$ которого принимают минимально возможные значения $P^*{}_j=\underline{P}(A_j)$ при малых c_j, т. е. $c_j<c^*$, максимальные $P^*{}_j=\overline{P}(A_j)$ при $c_j>c^*$, где c^* подбирается таким, чтобы $\mathbf{P}^*$ был вектором вероятностей, а именно $\sum P^*{}_j=1$. Этой цели служит и выбор P^* — компоненты векотра $\mathbf{P}$ индекса i, соответствующего равенству $c_i=c^*$.

Дальнейшее продолжение средних теперь уже на все ограниченные сверху признаки, которые в совокупности своей и составят естественную область существования средних для Σ-ИРВ, производится по известной формуле

$$\overline{M}f=\inf_{g:\,f(x)\leqslant g(x)\in\mathscr{L}\mathscr{A}_\Sigma}\overline{M}g,\quad f\in\mathscr{F}_0.$$

Счетно-аддитивные ИРВ. Мы сознательно долго воздерживались от безоговорочного распространения $\overline{P}(A_J)$, $A_J=\sum\limits_{j\in J}A_j$, на счетные J по свойству суммируемости рядов, ибо этот шаг сразу вывел бы нас из привычных рамок принятой аксиоматики. Этот шаг — компетенция первичного набора, к чему мы теперь и обратимся.

Пусть $\mathscr{A}_\Sigma=\{A_1,\ A_2,\ \ldots\}$ — счетный набор непересекающихся событий, образующих разбиение $\mathscr{X}$. Мы видели, что если первичными являются значения $\underline{P}(A_j)$, $\overline{P}(A_j)$, то нижние без ущерба переходят по аддитивности на $\underline{P}(A_J)$ для любых, в том числе счетных J, а верхние $\overline{P}(A_{J_k})$ — только для конечных J_k, образуя костяк расчетов вероятностей (по (1.5)) для Σ-ИРВ.

Будем теперь считать, что первичными являются не только A_j (а отсюда и A_{J_k}), но и всевозможные счетные объединения A_J, в совокупности образующие систему $\mathscr{A}_\sigma$ событий, причем первичные вероятности задаются сразу счетно-аддитивными в том смысле, что $\overline{P}(A_J)=\sum\limits_{j\in J}\overline{P}(A_j)$, $\underline{P}(A_J)=\sum\limits_{j\in J}\underline{P}(A_j)$, $\forall J$, конечных и счетных J (ниже, в дополнении 3 показывается, что это требование

вовсе не является обязательным: первичной может быть $\mathscr{A}_\sigma$, а вероятности на ней заданы не счетно-аддитивными).

Интервальное распределение вероятностей, первичной для которого является система $\mathscr{A}_\sigma$ счетных сумм непересекающихся событий, а первичные вероятности (нижняя и верхняя) счетно-аддитивны, называется *счетно-аддитивным* (короче, σ-ИРВ) и обозначается $\langle\underline{P}(A_\sigma),\ \overline{P}(A_\sigma)\rangle$.

При одних и тех же интервалах $\underline{P}(A_j)$, $\overline{P}(A_j)$, $j=1,\ 2,\ \ldots$, за счет расширения первичного набора счетно-аддитивные ИРВ оказываются более узкими, чем Σ-ИРВ:

$$\langle\underline{P}(\mathscr{A}_\sigma),\ \overline{P}(\mathscr{A}_\sigma)\rangle\subset\langle\underline{P}(\mathscr{A}_\Sigma),\ \overline{P}(\mathscr{A}_\Sigma)\rangle.$$

Более того, σ-ИРВ, в общем, не относятся к классу Σ-ИРВ, потому что $\mathscr{A}_\sigma$ содержат счетные суммы событий, тогда как Σ-ИРВ задаются отдельными экземплярами событий и их вероятностями.

Таким образом, свойство счетной аддитивности эквивалентно фактическому расширению первичного набора событий и наложению дополнительных требований на первичные вероятности.

Для счетно-аддитивных ИРВ формула (1.5) согласования вероятностей на $\mathscr{A}_\sigma$ (они все будут теперь уже первичными) верна без каких-либо оговорок для всех $A_J\in\mathscr{A}_\sigma$. Равно как и формула (1.6) становится справедливой для вторичных признаков, каковыми являются теперь уже любые счетные суммы $\sum\limits_1^\infty c_jA_j$ событий A_j из $\mathscr{A}_\sigma$. Для сравнения прямого и счетно-аддитивного ИРВ приведем пример.

Пример 1.10. Пусть $\mathscr{X}=\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}$ — натуральный ряд чисел и заданы первичные вероятности $\underline{P}_0$, $\overline{P}_0$, $\underline{P}_1$, $\overline{P}_1$, ... так, что $\sum\limits_0^\infty\underline{P}_j\leqslant 1$. Получается Σ-ИРВ (собственно, для произвольных пространств $\mathscr{X}$ и дробления $\mathscr{A}_\Sigma=\{A_1,\ A_2,\ \ldots\}$ мы придем к такому же ИРВ, если отобразим $A_j\to j$, $j=0,\ 1,\ \ldots$). Для конечного множества J_k точек вероятности согласуются по (1.5). Рассмотрим счетное событие $A=\{0,\ 2,\ 4,\ \ldots\}$, состоящее из четных чисел, и A^c — из нечетных. Тогда для Σ-ИРВ

$$\underline{P}(A)=\sum_{j=0}^\infty\underline{P}_{2j},\quad \underline{P}(A^c)=\sum_{j=0}^\infty\underline{P}_{2j+1},$$

откуда получаются согласованные значения $\underline{P}(A)=\underline{P}(A)$, $\overline{P}(A)=1-\underline{P}(A^c)$. Отметим, что $\overline{P}_j$ не участвуют в определении верхней вероятности счетных событий A по отсутствию конечных накрывающих A систем первичных событий.

Для счетно-аддитивного ИРВ дополнительным условием непротиворечивости будет $\sum\limits_1^\infty\overline{P}_j\geqslant 1$. При конечных J_k вероятности те же. Для введенного выше

A имеем: $\tilde{P}(A)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\tilde{P}_{2j}$, $\tilde{P}(A^c)=\sum\limits_{j=0}^{\infty}\tilde{P}_{2j+1}$, и согласованными будут уже другие значения $\underset{\sim}{P}(A)=\max\{\underset{\sim}{P}(A),\ 1-\tilde{P}(A^c)\}$; $\tilde{P}(A)=\min\{\tilde{P}(A),\ 1-\underset{\sim}{P}(A^c)\}$, что соответствует более точным вероятностям. Это увеличение точности достигается за счет того, что первичными исходными считаются не только натуральные числа, но и их всевозможные счетные суммы.

При точных первичных вероятностях $\underset{\sim}{P}_j=\tilde{P}_j=P_j$, $j=0,\ 1,\ \ldots$, таких, что $\sum\limits_{0}^{\infty}P_j=1$ (условие непротиворечивости), как нетрудно видеть, вероятность любого события A будет точной: $\underset{\sim}{P}(A)=\tilde{P}(A)=P(A)$ как для конечно, так и для счетно-аддитивных ИРВ, т. е. оба типа ИРВ совпадут между собой и вероятность любого счетного подмножества будет точной, равной сумме вероятностей. Это есть закон счетной аддитивности точных вероятностей, верный для дискретных (конечных или счетных) дроблений $\mathscr{A}_\Sigma$ произвольного пространства $\mathscr{X}$.

Обобщения. Здесь будет рассмотрен случай, когда $\mathscr{A}_\Sigma$ не является дискретным, т. е. конечным или счетным. Удобно для наглядности воображать в качестве $\mathscr{X}$ числовую прямую $\mathscr{R}$.

Система $\mathscr{A}$ подмножеств называется *кольцом* и обозначается $\mathscr{K}$, если она замкнута по отношению к операциям пересечения и симметричной разности (Δ): $A,\ B\in\mathscr{K}\Rightarrow AB\in\mathscr{K}$, $A\Delta B=AB^c\cup\cup A^cB\in\mathscr{K}$. А если к тому же она замкнута по отношению к счетным объединениям, то называется *σ-кольцом* и обозначается $\mathscr{K}_\sigma$. На числовой прямой $\mathscr{R}$ кольцо множеств образуется всевозможными конечными объединениями (суммами) непересекающихся отрезков, это будет *кольцо отрезков* $\mathscr{K}_\Sigma$ (подробнее см. [20]).

Мерой на кольце $\mathscr{K}$ называется неотрицательная конечно-аддитивная функция множеств, а на $\mathscr{K}_\sigma$ — счетно-аддитивная. Заметим, что суммы $A_{J_h}=\sum\limits_{j\in J_h}A_j$ непересекающихся A_j в предыдущем изложении образовывали кольцо (а дополненные счетными суммами — σ-кольцо) и $\underset{\sim}{P}(A_J)$, $\tilde{P}(A_J)$ — меры на нем (причем $\underset{\sim}{P}(A_J)$ без ущерба продолжаются до счетно-аддитивной меры).

Вернемся к общему случаю и будем считать, что первичные вероятности преподносятся двумя мерами $\underset{\sim}{P}(A)$ и $\tilde{P}(A)$, $A\in\mathscr{K}$, на кольце $\mathscr{K}$. Конечно-аддитивная мера формирует Σ-ИРВ, а счетно-аддитивная на σ-кольце — соответственно σ-ИРВ.

Например, на $\mathscr{R}$ определены вероятности $\underset{\sim}{P}[a,\ b)$, $\tilde{P}[a,\ b)$ любых отрезков и мы их переносим по аддитивности на суммы отрезков. При этом вероятности $\tilde{P}$ могут быть или оказаться больше 1, что не вносит затруднений, так как откорректируется при согласовании. В общем, $\tilde{P}(A)$, задаваемые как первичные вероятности на мелких множествах, оказываются уже не вероятностями, а мерами на широких множествах.

Требование непротиворечивости задания первичных мер состоит в следующем:

а) $0\leqslant\underset{\sim}{P}(A)\leqslant\tilde{P}(A)$, $\forall\mathscr{A}\in\mathscr{K}$;

б) $\underset{\sim}{P}(A)\leqslant 1$, $\forall A\in\mathscr{K}$;

в) $\tilde{P}(\mathscr{X})\geqslant 1$.

Последнее условие имеет смысл, когда $\mathscr{X}$ входит в систему первичных событий. Иначе оно не нужно, так как по аксиоме **A1** все равно будет $P(\mathscr{X})=1$.

Формула продолжения и согласования вероятностей тождественна (1.5). Для произвольных событий она запишется:

$$\overline{P}(B)=\min\Big\{\inf_{B\subset A\in\mathscr{K}}\tilde{P}(A),\quad 1-\sup_{B^c\supset A\in\mathscr{K}}\underset{\sim}{P}(A)\Big\}.$$

Отметим, что если верхние вероятности не заданы, т. е. можно считать $\tilde{P}(A)=1$, $\forall A\in\mathscr{K}$, то $\underline{P}(A)=\underset{\sim}{P}(A)$, $\overline{P}(A)=1-\underset{\sim}{P}(A^c)$, $A\in\mathscr{K}$. Тогда нижняя вероятность аддитивна на суммах: $\underline{P}(\sum A_i)=\sum\underline{P}(A_i)$, а верхняя — в общем, нет.

Признак $f(x)$ называется *$\mathscr{K}$-измеримым*, если он представляется как равномерно сходящийся предел конечных линейных комбинаций событий из $\mathscr{K}$. Строго говоря, класс всех $\mathscr{K}$-измеримых признаков составляется замыканием класса $\mathscr{L}\mathscr{K}$ относительно равномерной сходимости. Слово «измеримый f» означает, что, умея измерять меры событий $A\in\mathscr{K}$, можно сколь угодно точно вычислить за конечное число шагов интеграл от f.

Если $f\in\mathscr{L}\mathscr{K}$, т. е. f есть конечная линейная комбинация событий из $\mathscr{K}$, то $\overline{M}f$ находится по (1.6). При $\mathscr{X}=\mathscr{R}$ для измеримых относительно кольца отрезков f (это все непрерывные функции x и с разрывами первого рода) суммы в (1.6) превращаются в интегралы:

$$\overline{M}f=\min_{c}\left[c+\int(f(x)-c)^+\,d\tilde{P}-\int(c-f(x))^+\,d\underset{\sim}{P}\right],\tag{1.7}$$

где плюс означает, что берется неотрицательная часть функции. Для Σ-ИРВ (первичным является кольцо $\mathscr{K}_\Sigma$ отрезков) здесь интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса, а для σ-ИРВ — в смысле Лебега — Стилтьеса и для последнего класс признаков расширяется до измеримых по Лебегу.

Точные распределения вероятностей. Пусть на произвольной системе $\mathscr{A}$ первичных событий даются точные вероятности: $\underset{\sim}{P}(A)=\tilde{P}(A)=P(A)$, $A\in\mathscr{A}$. Их согласованность эквивалентна непротиворечивости и состоит в том, что: 1) $A,\ B\in\mathscr{A}$, $A\subset B\Rightarrow\Rightarrow P(A)\leqslant P(B)$; 2) если $A_j\in\mathscr{A}$ — попарно непересекающиеся события и их сумма также входит в систему $\mathscr{A}$, то выполняется закон аддитивных вероятностей:

$$\sum A_j\in\mathscr{A}\Rightarrow P(\sum A_j)=\sum P(A_j).$$

Вероятность суммы непересекающихся $A_j\in\mathscr{A}$ будет всегда точной, если сумма конечна (что сразу следует из свойств 8, 9), поэтому требование конечной аддитивности точных вероятностей обязательно уже при их задании и равносильно их непротиворечивости. Но не требование счетной аддитивности, тем не менее которое должно выполняться, когда по заданию заведомо известно, что $\sum_1^\infty A_j \in \mathscr{A}$, т. е. что счетная сумма имеет точную вероятность.

Общие свойства точных вероятностей непосредственно вытекают из свойств интервальных вероятностей (см. начало настоящего параграфа). Продолжим начатую там нумерацию свойств, считая $A_i \in \mathscr{A}$.

12. $P(\mathscr{X})=1,\ P(\varnothing)=0$.

13. $P(A)=1-P(A^c)$.

14. $P\left(\sum_1^k A_i\right)=\sum_1^k P(A_i)$.

15. $\lim_{k\to\infty} \overline{P}\left(\sum_{k+1}^\infty A_i\right)=0 \Rightarrow P\left(\sum_1^\infty A_i\right)=\sum_1^\infty P(A_i)$.

Обозначим $\mathscr{A}_*$ — набор событий, на котором при продолжении с $\mathscr{A}$ вероятности остаются точными. Очевидно, $\mathscr{A}_* \supset \mathscr{A}$. Из свойств **12** и **13** следует, что $\mathscr{X},\ \varnothing \subset \mathscr{A}_*$ и что $A \in \mathscr{A}_* \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}_*$. Свойство **14** означает замкнутость $\mathscr{A}_*$ относительно конечных сложений непересекающихся событий. Чем шире $\mathscr{A}$ в смысле количества событий и замкнутости операций, тем богаче будет $\mathscr{A}_*$, откуда могут появиться дополнительные свойства точных вероятностей.

Перейдем к случаю, когда исходный набор $\mathscr{A}$ замкнут относительно пересечений и разностей, т. е. образует собой кольцо множеств $\mathscr{A}=\mathscr{K}$ (можно и полукольцо, скажем, все отрезки числовой прямой). Тогда согласно свойствам **12**, **13**, **14** набор $\mathscr{A}_*$ событий, на которые продолжаются точные вероятности, образует *алгебру* множеств (алгебра есть кольцо с включенным в него $\mathscr{X}$, т. е. замкнутое относительно дополнений).

Конечно-аддитивными распределениями вероятностей (обозначаются $\mathscr{P}_\Sigma$) называются ИРВ, заданные первичными точными вероятностями на алгебре (полукольце, кольце) событий. Это частный случай Σ-ИРВ, когда первичные интервалы вероятностей превращаются в точные значения. Для этого случая, подставляя $\underline{P}(A_i)=P(A_i),\ A_i \in \mathscr{A}_*$, имеем по свойству **9**: $\underline{P}\left(\sum_1^\infty A_i\right)=\sum_1^\infty P(A_i)$, т. е. точные исходные вероятности переходят по аддитивности в нижние вероятности счетных сумм. А вот верхние вероятности — в общем, нет. За исключением случая, когда остатки $\sum_{k+1}^\infty A_i$ сумм могут быть покрыты событиями B_k, вероятности которых при $k\to\infty$ делаются сколь угодно малыми. Тогда действует свойство **15**. В целях иллюстрации ниже приводится пример 1.11.

Свойство счетной аддитивности, механически перенесенное на любые счетные суммы, эквивалентно расширению первичного набора до *сигма-алгебры* $\mathscr{A}_\sigma$, включающей вместе с событиями любые их счетные суммы и дополнения к ним, и заданию на $\mathscr{A}_\sigma$ *счетно-аддитивного распределения* вероятностей $\mathscr{P}_\sigma$ (частный случай σ-ИРВ):

$$A_i \in \mathscr{A}_\sigma \Rightarrow \sum_1^\infty A_i \in \mathscr{A}_\sigma,\quad P_\sigma\left(\sum_1^\infty A_i\right)=\sum_1^\infty P_\sigma(A_i)$$

(первичной может быть $\mathscr{A}_\sigma$, а вероятности на ней точные, но не счетно-аддитивные, как это показывается в дополнении 2).

Для $\mathscr{P}_\sigma$ выполняется свойство монотонной сходимости: $B_n \uparrow B \Rightarrow P_\sigma(B_n)\to P_\sigma(B)$, в определенном смысле эквивалентное счетной аддитивности [19] точных вероятностей.

Средние от $\mathscr{A}_*$-измеримых признаков будут точными, получаемыми согласно (1.7) интегрированием $Mf=\int f(x)\,dP$, причем для $\mathscr{P}_\Sigma$ это будут интегралы Римана-Стилтьеса, а для $\mathscr{P}_\sigma$ — Лебега-Стилтьеса (тогда класс f с точными средними расширяется до измеримых по Лебегу). Продолжение средних на неограниченные признаки производится согласно (1.4):

$$\underline{M}f=\lim_{H_2\to\infty}\ \lim_{H_1\to\infty} Mf^{(-H_2,\,H_1)},\ \overline{M}f=\lim_{H_1\to\infty}\ \lim_{H_2\to\infty} Mf^{(-H_2,\,H_1)}.$$

При этом все усеченные признаки $f^{(-H_1,\,H_2)}$ должны быть измеримыми. Очевидно, среднее будет точным $\underline{M}f=\overline{M}f$, если пределы справа не зависят от порядка устремления H_1 и H_2 к бесконечности — это будет интеграл от неограниченной функции.

Для точных средних справедливо свойство $M\sum f_i=\sum Mf_i$, согласно которому символ M можно проносить за знаки конечных сумм. Это общее свойство. А в каких свойствах $\mathscr{P}_\Sigma$ будет отличаться от $\mathscr{P}_\sigma$? Ответ на поставленный вопрос дается примером.

Пример 1.11. Равномерное распределение (*мера-длина*). Пусть на $\mathscr{X}=[0;\ 1)$ первичными являются вероятности $P[a,\ b)=b-a,\ 0\leqslant a<b\leqslant 1$, равные длинам отрезков. При продолжении они определяют Σ-ИРВ $\mathscr{P}_\Sigma$ с точными вероятностями на алгебре отрезков $\mathscr{A}_\Sigma$ (куда входят суммы конечного числа отрезков и дополнения к ним). Точными нулевыми будут вероятности отдельных точек $P(x_i)=0$ (получается при $a\to b=x_i$) и их конечных наборов: $P\left(\bigcup_1^k x_i\right)=\sum_1^k P(x_i)=0$, поэтому считается $\bigcup_1^k x_i \in \mathscr{A}_\Sigma$. Для счетного числа точек все зависит от их расположения в смысле приемлемости свойства **15**. Например, событие $A=\{1,\ 1/2,\ 1/3,\ 1/4,\ \ldots\}$ будет иметь нулевую вероятность, так как остаток $\{1/k,\ 1/(k+1),\ \ldots\}$ покрывается отрезком $[0;\ 1/k)$ вероятности $1/k$, которая при увеличении k делается сколь угодно малой. А счетное событие D_∞ (множество (Дирихле), состоящее из всех рациональных точек отрезка $[0,\ 1)$, нельзя аналогичным образом покрыть, поэтому его вероятность вовсе неизвестна:

$$\underline{P}_\Sigma(D_\infty)=0;\quad \overline{P}_\Sigma(D_\infty)=1.$$

Результат сводится к фразе: *«умея измерять сколь угодно точно длины отрез-*

ков, нельзя никакими средствами замерить длину множества всех рациональных чисел»; практический смысл ее очевиден.

Счетно-аддитивное распределение $\mathscr{P}_\sigma$ при тех же начальных данных отрицает выделенный нами тезис. Оно имеет те же вероятности отрезков и их конечных сумм. Отличие в абсолютизации закона счетной аддитивности вероятностей. Так, для упомянутого множества Дирихле

$$\mathscr{P}_\sigma(D_\infty)=\sum_{x\in D_\infty}P(x)=\sum_{1}^{\infty}0=0.$$

В нашем случае $\mathscr{P}_\sigma$ совпадает с мерой Лебега на отрезке [0; 1). Очевидно, $\mathscr{P}_\sigma\subset\mathscr{P}_\Sigma$ и первичными для $\mathscr{P}_\sigma$ фактически являются всевозможные конечные и счетные суммы отрезков и дополнений к ним, образующих борелевскую сигма-алгебру $\mathscr{A}_\sigma$. А точной эта мера после продолжения оказывается на несколько более широкой системе событий — так называемых лебеговых множествах, которые отличаются от борелевских лишь нулевыми событиями.

Средние Mf есть соответственно интегралы Римана (для $\mathscr{P}_\Sigma$) и Лебега (для $\mathscr{P}_\sigma$) на отрезке [0; 1) от интегрируемой функции $f(x)$.

Рассмотрим промежуточный случай между $\mathscr{P}_\Sigma$ и $\mathscr{P}_\sigma$. Пусть $\mathscr{P}_\Sigma$ дополняется еще одной первичной вероятностью $P(D_\infty)=1/2$ и обозначим полученное распределение $\mathscr{P}_\rho$. Имеем $\mathscr{P}_\rho=\mathscr{P}_\Sigma\wedge\langle P(D_\infty)=1/2\rangle$ и $\mathscr{P}_\sigma\subset\mathscr{P}_\rho\subset\mathscr{P}_\Sigma$, что являет пример, когда точными имеются вероятности отдельных исходов $x\in\mathscr{R}$, их счетной суммы D_∞, а в то же время закон счетной аддитивности не выполняется: $1/2=P(D_\infty)>\sum_{x\in D_\infty}P(x)=0$. Иллюстрация необязательности счетной аддитивности.

Интервальные функции распределения. Пусть $\mathscr{X}=\mathscr{R}$ — числовая прямая, и первичными являются вложенные друг в друга неограниченные слева полуинтервалы $(-\infty,\ y)$, $y\in\mathscr{Y}$, где $\mathscr{Y}$ — произвольное подмножество $\mathscr{R}$.

Первичные вероятности

$$\underset{\sim}{P}(-\infty,\ y)=\underset{\sim}{F}(y),\quad \tilde{P}(-\infty,\ y)=\tilde{F}(y),\quad y\in\mathscr{Y},$$

как функции переменной y называется нижней и верхней первичными функциями распределения, а задаваемое ими в результате продолжения ИРВ называется *интервальной функцией распределения*.

Условие непротиворечивости первичных вероятностей выливается в требование

$$0\leqslant\underset{\sim}{F}(x)\leqslant\tilde{F}(y)\leqslant1,\quad \forall x\leqslant y,\quad x,\ y\in\mathscr{Y},$$

состоящее в том, что нижняя функция распределения нигде слева от y не должна возвышаться над верхней $\tilde{F}(y)$ (что будет обязательно выполнено, если, как это обычно делается, задавать $\underset{\sim}{F}(y)$ и $\tilde{F}(y)$ неубывающим и нижнюю не больше верхней: $\underset{\sim}{F}(y)\leqslant\tilde{F}(y)$, $\forall y$).

Согласование первичных вероятностей и продолжение их на любые полуинтервалы $(-\infty,\ x)$, $x\in\mathscr{R}$, проводится по формуле

$$\underline{F}(x)=\sup_{x\geqslant y\in\mathscr{Y}}\underset{\sim}{F}(y),\quad \overline{F}(x)=\inf_{x\leqslant y\in\mathscr{Y}}\tilde{F}(y).\tag{1.8}$$

Вероятности полуинтервалов продолжаются на вероятности одиночных отрезков:

$$\underline{P}(y,\ z)=[\underline{F}(z)-\overline{F}(y)]^+;\quad \overline{P}[y,\ z)=\overline{F}(z)-\underline{F}(y),$$

где плюс указывает на неотрицательную часть функции. Распространение этих формул на конечные суммы непересекающихся отрезков производится согласно выражениям:

$$\underline{P}\left(\sum_{1}^{k}[y_i,\ z_i)\right)=\sum_{1}^{k}\underline{P}[y_i,\ z_i);$$

$$\overline{P}\left(\sum_{1}^{k}[y_i,\ z_i)\right)=\overline{F}(z_k)-\underline{F}(y_1)-\sum_{1}^{k-1}[\overline{F}(y_{i+1})-\underline{F}(z_i)]^+,$$

в которых полагается $y_1\leqslant z_1\leqslant y_2\leqslant z_2\leqslant\ldots\leqslant y_k\leqslant z_k$.

При точных функциях распределения $\underline{F}(x)=\overline{F}(x)=F(x)$, $\forall x$, (для этого таковыми они должны быть заданы) вероятности отрезков будут точными, равными приращениям: $P[y,\ z)=F(z)-F(y)$, как и для их конечных сумм, а продолжение на признаки будет соответствовать интегрированию по Риману — Стилтьесу: $Mg=\int g(x)\,dF(x)$.

Подобие ИРВ. Начнем с частных случаев. Пусть на произвольном $\mathscr{X}$ задан расширяющийся набор событий $\mathscr{A}_\uparrow=\{A_y,\ y\in\mathscr{Y}\subset\mathscr{R}\}$, $A_y\subset A_{y'}$ при $y<y'$. И пусть первичными являются вероятности этих событий $\underset{\sim}{F}(y)=\underset{\sim}{P}(A_y)$, $\tilde{F}(y)=\tilde{P}(A_y)$. Тогда совершенно естественно отобразить $\mathscr{X}\to\mathscr{Y}$ так, чтобы $A_y\to(-\infty,\ y)$, и получить интервальную функцию распределения. Таким образом, ИРВ$\langle\underset{\sim}{P}(\mathscr{A}_\uparrow),\ \tilde{P}(\mathscr{A}_\uparrow)\rangle$ по своей структуре и свойствам оказывается подобной интервальной функции распределения.

Аналогично, если задано Σ-ИРВ $\langle\underset{\sim}{P}(\mathscr{A}_\Sigma),\ \tilde{P}(\mathscr{A}_\Sigma)\rangle$ на произвольном $\mathscr{X}$, то, отобразив элементы разбиений A_j в точки y_j числовой прямой, получим подобное ИРВ на подмножестве $\mathscr{Y}=\{y_1,\ y_2,\ \ldots\}$ числовой прямой. Если это окажется удобным, то можно считать $y_j=j$, и тогда $\mathscr{Y}$ — натуральный ряд чисел.

Основу подобия составляет взаимно-однозначное соответствие первичного набора множеств одного пространства, т. е. $\mathscr{X}$ и другого — $\mathscr{Y}$ с сохранением множественных операций объединения и пересечения (что называется гомеоморфизмом алгебр [20]). Очевидно, любое отображение $y=\mathrm{S}x$ пространства $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ обеспечивает указанное соответствие.

Интервальное распределение вероятностей $\langle\tilde{P}^y(\mathscr{B})\rangle$ на $\mathscr{Y}$ называется *подобным* ИРВ$\langle\tilde{P}^x(\mathscr{A})\rangle$ на $\mathscr{X}$, если существует отображение S пространства $\mathscr{X}$ на $\mathscr{Y}$, при котором события $A\in\mathscr{A}$ переходят в события $B=SA\in\mathscr{B}$ с сохранением первичных вероятностей.

Конечно же, из $\mathscr{A}$ желательно изъять все события с несогласованными значениями $\bar{P}(A)$, тогда $\bar{P}^x(A)=\bar{P}^y(SA)$, $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$.

Смысл подобия состоит в упрощении структуры пространства $\mathscr{X}$ редукцией его в пространство $\mathscr{Y}$ как можно меньшей размерности. В то же время и согласование вероятностей, и их продолжение в обоих пространствах одинаково.

Семейства распределений. Пусть $\mathscr{P}_\theta$, $\theta\in\Theta$ — семейство точных распределений вероятностей на $\mathscr{X}$. Неизвестно, какое из $\mathscr{P}_\theta$ дает правильное описание явления, но какое-то из них это обязательно делает. Сказанное эквивалентно объединению $\mathscr{P}_\theta$, что ведет к ИМ:

$$\mathscr{M}=\bigvee_{\theta\in\Theta}\mathscr{P}_\theta.$$

Следовательно, любые семейства распределений вероятностей (аддитивных или счетно-аддитивных) дают ИМ, определяемую средними

$$\underline{M}g=\inf_{\theta\in\Theta}M_\theta g,\quad \overline{M}g=\sup_{\theta\in\Theta}M_\theta g,$$

где g — признаки, для которых средние по всем $\mathscr{P}_\theta$ являются точными.

Результат объединения, подчеркнем, есть в общем ИМ (а не ИРВ), за некоторым исключением, когда $\mathscr{P}_\theta$ является точками «тела» (можно, крайними) ИРВ. Например Σ-ИРВ $\langle \underset{\sim}{P}(\mathscr{A}_\Sigma)$, $\bar{P}(\mathscr{A}_\Sigma)\rangle$ можно представить себе как объединение конечно-аддитивных распределений $\mathscr{P}_\Sigma$ таких, для которых $P(A_j)$ являются неизвестными и подчиняются условиям: $\underset{\sim}{P}(A_j)\leqslant P(A_j)\leqslant\bar{P}(A_j)$, $A_j\in\mathscr{A}_\Sigma$, (собственно, исходя из такого представления, в дополнении 2 доказываются формулы (1.5) и (1.6)).

Интервальную функцию распределения также можно мыслить себе как совокупность точных функций распределения, что позволяет выводить выражения для средних по формуле:

$$\overline{M}g=\sup_{\underline{F}\leqslant F\leqslant\overline{F}}\int g(x)\,dF(x).$$

Например, для признака $g(x)$, имеющего в точке x_m единственный глобальный максимум и не имеющего никаких локальных, получается:

$$\overline{M}g=g(x_m)\,[\overline{F}(x_m)-\underline{F}(x_m)]+\int_{-\infty}^{x_m}g(x)\,d\underline{F}(x)+\int_{x_m}^{\infty}g(x)\,d\overline{F}(x),$$

так как максимум достигается на $F(x)$, равной $\underline{F}(x)$ при $x<x_m$, имеющей в точке x_m скачок до $\bar{F}(x)$ и равной $\overline{F}(x)$ при $x>x_m$.

Относительные вероятности и средние. Истина постигается в сравнении. Это философское изречение применимо и к случайным явлениям. Подчас исходными данными являются сравнительные сведения о вероятностях и средних. Это суждения типа: «Событие A более вероятно, чем событие B», записываемое кратко «$PA\geqslant PB$»; или такое: «Признак f в среднем принимает большее значение, чем g», записываемое «$Mf\geqslant Mg$». Эти данные называются *относительными* (субъективными [14]) вероятностями и средними и характерны для экспертных оценок. Покажем, как они формально представляются в виде семейств распределений вероятностей и как преобразуются в средние значения соответствующих признаков.

Представим на миг, что вероятности событий A и B точные (что само собой подразумевает статистическую устойчивость явления) и соответствуют какому-либо точному распределению вероятностей $\mathscr{P}$ такому, что $P(A)\geqslant P(B)$. Для него по свойствам средних $M_{\mathscr{P}}(A-B)\geqslant M_{\mathscr{P}}A-M_{\mathscr{P}}B=P(A)-P(B)\geqslant 0$. Фраза «$PA\geqslant PB$» соответствует семейству всех таких распределений: $\mathscr{M}=\bigvee\mathscr{P}$, и по правилам вычисления средних для семейств имеем $\underline{M}(A-B)=\inf_{\mathscr{P}}M_{\mathscr{P}}(A-B)=0$. Результат в терминах верхних средних записется $\overline{M}(B-A)=0$ и может рассматриваться как соответствующее фразе «$PA\geqslant PB$» первичное среднее (см. табл. 1.1).

Из «$PA\geqslant PB$» продолжением первичного среднего вытекает $\underline{P}(B)\leqslant\underline{P}(A)\leqslant\bar{P}(B)$, $\bar{P}(B)\leqslant\bar{P}(A)$ (так как $\underline{M}B-\underline{M}A\leqslant 0=\overline{M}(B-A)\leqslant\overline{M}B-\overline{M}A$ и $0=\overline{M}(B-A)\geqslant\overline{M}B-\overline{M}A$) и интерпретируется как тот факт, что интервальная вероятность события A, перекрываясь, в общем, с интервальной вероятностью B, смещена в сторону бо́льших значений.

Разным фразам о старшинстве вероятностей соответствуют первичные средние вида $\overline{M}(B(x)-A(x))=0$, которые при разных A и B согласуются по правилам средних и продолжаются на любые признаки. Интересно, что и здесь будут верны правила логического вывода: «$PA\geqslant PB$» и «$PB\geqslant PC$»$\Rightarrow$«$PA\geqslant PC$» (так как $\overline{M}(C-B+B-A)\leqslant\overline{M}(C-B)+\overline{M}(B-A)\leqslant 0$).

Перейдем к средним. Совершенно аналогично показывается, что предложение «$Mf\geqslant Mg$» в устойчивых условиях эквивалентно $\underline{M}(f-g)=0$. Условием согласования этого предложения со средними от признаков f и g являются: $\underline{M}g\leqslant\underline{M}f\leqslant\overline{M}g$, $\overline{M}g\leqslant\overline{M}f$.

З а м е ч а н и е. Соотношение $\underline{M}f\geqslant\overline{M}g$, при котором интервалы средних не перекрываются между собой, отражает более жесткое предложение: «f в среднем больше g в любых (неустойчивых) условиях», когда точные средние Mf и Mg не существуют и допускаются лишь в интервальном понимании.

Дополнения. 1. А к с и о м а т и з а ц и я И Р В. Интервальные распределения вероятностей сами по себе могут быть определены как наборы интервальных вероятностей $\underline{P}(A)$, $\bar{P}(A)$, $\forall A\subset\mathscr{X}$, связанных между собой аксиомами [21]: 1) $\underline{P}(\mathscr{X})=\bar{P}(\mathscr{X})=1$; 2) $\bar{P}(A+B)\leqslant\bar{P}(A)+\bar{P}(B)$, $AB=\varnothing$; 3) $\underline{P}(A+B)\geqslant\underline{P}(A)+\underline{P}(B)$, $AB=\varnothing$; 4) $\underline{P}(A)=1-\bar{P}(A^c)$ (возможны и другие варианты эквивалентного выбора аксиом). Согласованные в смысле этих аксиом вероятности могут быть результатом продолжения первичных вероятностей, а дальнейшее продолжение вероятностей на средние признаков f по правилам ИМ приводит в итоге к интервальным средним $\underline{M}f$, $\bar{M}f$.

Этот путь традиционно вторит современному вероятностному подходу, где средние для измеримых f называются обычно *математическими ожиданиями* как результат математического расчета Mf по точным распределениям вероятностей $\mathscr{P}_\sigma$.

Аксиоматизация теории на базе вероятностей приводит к незамкнутой конструкции, поскольку очерчивает класс моделей только интервальными распределениями вероятностей, образующими все вместе лишь весьма узкий класс ИМ.

2. Доказательство теоремы 1.2. Докажем формулу (1.5). Событие A_J мажорируется либо самим собой, т. е. суммой $g_1(x)=\sum_{j\in J}A_j(x)$, тогда $\bar{M}g_1=\bar{P}(A_J)$, либо признаком $g_2(x)=1-\sum_{j\notin J}A_j(x)$, тогда $\bar{M}g_2=1-\underset{\sim}{P}(A^c{}_J)$. Минимальное (наиболее точное) из $\bar{M}g_1$ и $\bar{M}g_2$ и даст вероятность $\bar{P}(A_J)$ согласно (1.5). Легко убедиться, что никакой из других вторичных признаков, мажорирующих $A_J(x)$, не приведет к более точному значению этой вероятности.

Для доказательства (1.6) нужно представить $\langle\underset{\sim}{P}(\mathscr{A}_\Sigma),\ \bar{P}(\mathscr{A}_\Sigma)\rangle$ как семейство $\mathscr{A}_\Sigma$-точных распределений $\mathscr{P}$ таких, что $\underset{\sim}{P}(A_j)\leqslant P(A_j)\leqslant\bar{P}(A_j)$, и убедиться, что максимум по $\mathscr{P}$ при этих ограничениях

$$\bar{M}\sum c_j A_j(x)=\max_{\mathscr{P}}\sum c_j P(A_j)=\sum c_j P^*(A_j)$$

достигается на распределении вероятностей

$$P^*(A_j)=\begin{cases}\bar{P}(A_j) & \text{при } c_j>c^*,\\ \varkappa\bar{P}(A_j)+(1-\varkappa)\underset{\sim}{P}(A_j) & \text{при } c_j=c^*,\\ \underset{\sim}{P}(A_j) & \text{при } c_j<c^*,\end{cases}$$

где c^* и $\varkappa$ выбираются так, чтобы выполнялась нормировка $\sum P^*(A_j)=1$, причем этот выбор однозначен. Распределение $\mathscr{P}^*$ принимает максимальные значения $\bar{P}(A_j)$ в той части $\mathscr{X}$, где функция $g(x)=\sum c_jA_j(x)$ велика, т. е. $c_j>c^*$, а для соблюдения нормировки вероятностей вынужденно оставляются самые минимальные значения $\underset{\sim}{P}(A_j)$ тем A_j, на которых $g(x)$ мала, т. е. $c_j<c^*$.

3. Примеры конечно- и счетно-аддитивных распределений. Пусть $\mathscr{X}$ — произвольное пространство, состоящее из несчетного числа точек x, и пусть вероятность каждой точки задана нулевой: $\bar{P}(x)\equiv0$, $\forall x\in\mathscr{X}$. Это и будут первичные вероятности. Нулевые их значения передаются по аддитивности конечным суммам точек, составляющим здесь класс невозможных событий. Соответственно достоверными событиями, имеющими единичную нижнюю вероятность, будут противоположные события, т. е. $\mathscr{X}$ без любого конечного числа точек. Остальные события будут иметь тривиальные интервальные вероятности [0; 1]. Подчеркнем, что описанная модель — это не голое

ИРВ: как-никак данные о нулевых вероятностях точек все же присутствуют, что ведет к Σ-ИРВ.

Счетно-аддитивное распределение получится, если $\mathscr{X}$ несчетно и нулевые вероятности $\bar{P}(\bigcup_1^\infty x_i)=0$ исходно придаются любым конечным или счетным наборам точек. Здесь уже интервальные вероятности [0; 1] будут иметь только такие несчетные множества точек, что и дополнение к ним несчетно. Первичными для полученного σ-ИРВ являются счетные наборы точек и дополнения к ним, образующие вместе сигма-алгебру $\mathscr{A}_\sigma$, на которой вероятности счетно-аддитивны.

На $\mathscr{A}_\sigma$ будут заданы неаддитивные вероятности, если исходными иметь $\bar{P}(\bigcup_1^k x_i)=0$, $\bar{P}(\bigcup_1^\infty x_i)=1/2$ (вместо 1/2 может быть любая вероятность). Тогда исходное счетное множество точек будет иметь интервальную вероятность [0; 1/2].

Вернемся снова к началу примера и зададим для каждой точки x интервальную вероятность $0\leqslant\underset{\sim}{P}(x)\leqslant\bar{P}(x)\leqslant1$. Условие непротиворечивости сводится к тому, чтобы любые суммы нижних вероятностей не превышали единицу: $\sum\underset{\sim}{P}(x_i)\leqslant1$, а это фактически означает, что $\underset{\sim}{P}(x_i)$ могут быть заданы не равными нулю лишь на дискретном множестве точек, причем так, что их сумма не больше 1. На $\bar{P}(x)$ никаких ограничений не накладывается. В результате:

$$\underline{P}(B)=\sum_{x_i\in B}\underset{\sim}{P}(x_i),\quad \bar{P}(B)=\min\left\{\sum_1^k\bar{P}(x),\ 1\right\},$$

причем последнее равенство действует, если $B=\{x_1,\ \dots,\ x_k\}$, а если B не является конечным, то $\bar{P}(B)=1-\underline{P}(B^c)$.

4. Гибридные распределения вероятностей. Они получаются добавлением к распределениям вероятностей не существующих для них средних (математических ожиданий). Поясним на примерах. Пусть дано распределение Коши $\mathscr{P}_C$ вероятностями отрезков $P_C(a,\ b)=\dfrac{1}{\pi}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}a)$. Для него не существует ни математического ожидания, ни дисперсии, т. е. x, $x^2\notin\mathscr{F}_\infty$. Присвоим извне недостающие значения MX, MX^2, сделав это в согласии с вероятностями, т. е. не меняя их в пересечении $\mathscr{P}_C\wedge\langle MX\rangle\wedge\langle MX^2\rangle$. Это будет уже гибридная модель, не входящая в класс ИРВ, причем точные значения MX, MX^2 здесь могут заменяться на интервальные.

Другой пример, пусть $\mathscr{P}_л$ — равномерное распределение вероятностей на отрезке [0, 1]. Вероятности подотрезков равны их длинам, а математические ожидания — интегралам. Не существует математических ожиданий от неинтегрируемых по отрезку [0, 1] функций, скажем $f_k(x)=\dfrac{1}{(x-0{,}5)^k}$, $k\geqslant1$. Заполняя «пустоты» любыми согласованными между собой значениями Mf_k, приходим к гибридным моделям: $\bigwedge_k\langle Mf_k\rangle\wedge\mathscr{P}_л$.

Собственно, идея гибридных моделей близка к счетно-аддитивным распределениям вероятностей, а также к предельным формам моделей. В первом случае вероятностные интервалы для счетных сумм событий заменялись точными значениями согласно формуле счетной аддитивности (как видно из предыдущего анализа, этого не обязательно делать именно таким образом), а во втором перенос средних на неограниченные признаки («пустоты», не вошедшие в $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$) производится по формуле интегрирования. Во всех этих случаях сужение ИМ не вызывало изменения исходных вероятностей.

1.5. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОДЕЛЕЙ

Предисловие. Один итог, который уместно подвести, это то, что семейства моделей, а по сути их объединения, дают новые модели. Сказанное есть способ задания моделей совокупностями удобных, простых моделей (не обязательно семействами точных распределений вероятностей). Тогда тело модели наглядно представляется как выпуклая оболочка простейших ее частей, атомов; но может быть и не совсем простейших, а укрупненных по структуре, зато простых по описанию. Ясно, что представлений такого рода необычайно много, основные из них здесь рассматриваются.

Способы представлений делятся на универсальные и специальные. К *универсальным* относятся рассматриваемые здесь сечения тела ИМ параллельными гиперплоскостями, совокупности которых, как увидим, полностью определяются моделью и определяют ее. Сечения могут браться выборочно (задающие сечения), а также сами по себе могут описываться своими подсечениями.

К *специальным* способам относятся задания с помощью семейств, образованных сдвигами некоторой простой (стандартной) ИМ, введением неизвестного параметра в функциональное преобразование некоторого стандартного «шума» — процесса не столь уж сложной конфигурации, наконец заданием плотности (для нас она формальна) или семейств плотностей.

Сечения модели. *$\mathcal{G}$-простой* называется ИМ $\langle M\mathcal{G}\rangle$, определенная на первичном наборе $\mathcal{G}$ точными значениями Mg, $g\in\mathcal{G}$, первичных средних. Очевидно, $\langle M\mathcal{G}\rangle=\bigwedge_{g\in\mathcal{G}}\langle Mg\rangle$, и результат будет непустым только в случае непротиворечивости набора Mg, $g\in\mathcal{G}$, состоящего в следующем:

$$\sum_1^k c_i\, g_i(x)\geqslant 0\Rightarrow \sum_1^k c_i\, Mg_i\geqslant 0,\quad \forall c_i,\ g_i\in \mathcal{G}.$$

$M_*\mathcal{G}$-сечением ИМ $\mathcal{M}$ называется пересечение: $\mathcal{M}_{M_*\mathcal{G}}=\mathcal{M}\wedge\langle M_*\mathcal{G}\rangle$. Таким образом, $\mathcal{M}_{M_*\mathcal{G}}$ — это ИМ, полученная прибавлением к средним $\mathcal{M}$ набора точных первичных средних M_*g, $g\in\mathcal{G}$. Совокупность $M_*\mathcal{G}=\{M_*g: g\in\mathcal{G}\}$ есть набор числовых характеристик секущей ИМ; звездочки означают, что это вносимые извне (по желанию меняемые) величины.

Если $\mathcal{F}$ есть область существования для верхних средних $\mathcal{M}$, то областью существования для $M_*\mathcal{G}$-сечения $\mathcal{M}_{M_*\mathcal{G}}$ будет $\mathcal{L}(\mathcal{F}\cup\mathcal{G})$, состоящая из всевозможных признаков вида $f+\sum c_i g_i$, $f\in\mathcal{F}$, $g_i\in\mathcal{G}$. Область существования сечения шире, чем у исходной

ИМ, если $\mathcal{G}\cup\mathcal{F}\neq\mathcal{F}$, т. е. в $\mathcal{G}$ включаются признаки, не входящие в $\mathcal{F}$.

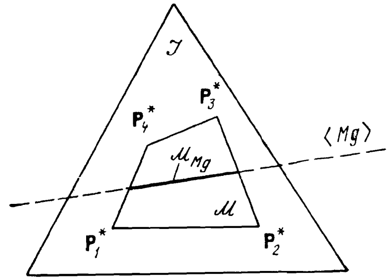


Рис. 1.8. Сечения модели

В случае одного секущего признака получается M_*g-сечение $\mathcal{M}_{M_*g}$. Это сечение будет, очевидно, пустым, если $M_*g<\underline{M}g$ или $M_*g>\overline{M}g$. Геометрически секущую ИМ $\langle M_*g\rangle$ (при конечном числе элементов пространства $\mathcal{X}$) можно представить себе как гиперплоскость в пространстве векторов вероятностей. Для случая $\mathcal{X}=\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ сечение $\mathcal{M}_{M^*g}$ изображено на рис. 1.8 сплошной линией.

Рассмотрим, как нужно искать средние, соответствующие сечениям. Пусть $\mathcal{M}_{M_*g}=\mathcal{M}\wedge\langle M_*g\rangle$. Первичными средними для $\mathcal{M}_{M_*g}$ будут $\overline{M}h$, $h\in\mathcal{F}$ и M_*g, поэтому

$$\overline{M}_{M_*g}f=\inf_{h(x)+cg(x)\geqslant f(x),\ h\in\mathcal{F}}(\overline{M}h+cM_*g),$$

где нижняя грань ищется по $c\in\mathcal{R}$ и по $h\in\mathcal{F}$. При заданном c нижняя грань по h достигается, когда $h=f-cg$, в результате

$$\overline{M}_{M_*g}f=\min_c[\overline{M}(f-cg)+cM_*g].\tag{1.9}$$

З а м е ч а н и е. Если g не принадлежит области существования обеих границ $\mathcal{M}$, т. е. $g\notin\mathcal{F}\cap(-\mathcal{F})$, то для любого признака $f\in\mathcal{F}\cap(-\mathcal{F})$ справедливо $\overline{M}_{M_*g}f=\overline{M}f$ (так как $\overline{M}(f-cg)=\infty$ при $c\neq 0$).

Аналогичным образом, если $\mathcal{G}_k=\{g_1,\ \ldots,\ g_k\}$ есть конечный набор признаков, то

$$\overline{M}_{M_*\mathcal{G}_k}f=\min_{\forall c_i}\left[\overline{M}\left(f-\sum_1^k c_i\, g_i\right)+\sum_1^k c_i\, M_*g_i\right].\tag{1.10}$$

Для произвольного набора $\mathcal{G}$ на основании равенств $\mathcal{M}_{M_*\mathcal{G}}=\mathcal{M}\wedge\langle\mathcal{M}_*\mathcal{G}\rangle=\mathcal{M}\wedge\left(\bigwedge_{\mathcal{G}_k\subset\mathcal{G}}\langle M_*\mathcal{G}_k\rangle\right)=\bigwedge_{\mathcal{G}_k\subset\mathcal{G}}(\mathcal{M}\wedge\langle M_*\mathcal{G}_k\rangle)=\bigwedge_{\mathcal{G}_k\subset\mathcal{G}}\mathcal{M}_{M_*\mathcal{G}_k}$ имеем:

$$\overline{M}_{M_*\mathcal{G}}f=\inf_{\mathcal{G}_k\subset\mathcal{G}}\overline{M}_{M_*\mathcal{G}_k}f,$$

где инфимум берется по всевозможным конечным поднаборам $\mathcal{G}_k$ признаков из $\mathcal{G}$.

Свойства сечений. Сечение обладает привычными свойствами ИМ. Помимо этого верны следующие свойства:

1. $\mathcal{M}_{M_*\mathcal{G}}\subset\mathcal{M}$.
2. $\mathcal{M}_{M_*\mathcal{X}}=\mathcal{M}$ при $M_*\mathcal{X}=1$, в противном случае $\mathcal{M}_{M_*\mathcal{X}}=\varnothing$.

3. $(\mathscr{M}_{M_*\mathscr{G}_1})_{M_*\mathscr{G}_2}=\mathscr{M}_{M_*(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2)}$, т. е. $M_*\mathscr{G}_2$-сечение $\mathscr{M}_{M_*\mathscr{G}_1}$ есть то же самое, что и $M_*(\mathscr{G}_1\cup\mathscr{G}_2)$-сечение $\mathscr{M}$, т. е. $\mathscr{M}\wedge\wedge\langle M_*\mathscr{G}_1\rangle\wedge\langle M_*\mathscr{G}_2\rangle$.

4. Если $\tilde{M}h$, $h\in\mathscr{H}$ определяет модель $\langle\tilde{M}\mathscr{H}\rangle$, то $M_*\mathscr{G}$-сечение будет определяться средними $\tilde{M}\mathscr{H}\cup M_*\mathscr{G}$, т. е. $\langle\tilde{M}\mathscr{H}\rangle_{M_*\mathscr{G}}= =\langle\tilde{M}\mathscr{H}\cup M_*\mathscr{G}\rangle$.

5. $\mathscr{M}=\bigwedge\limits_{\theta}\mathscr{M}_\theta\Rightarrow\mathscr{M}_{M_*\mathscr{G}}=\bigwedge\limits_{\theta}(\mathscr{M}_\theta)_{M_*\mathscr{G}}$ — пересечения перестановочны с сечениями.

6. Границы $\overline{M}_{M_*\mathscr{G}}f$ аддитивны относительно прибавления конечных линейных комбинаций признаков из $\mathscr{G}$: $\overline{M}_{M_*\mathscr{G}}(f+\sum c_ig_i)= =\overline{M}_{M_*\mathscr{G}}f+\sum c_i\,M_*g_i$.

Доказательство этих свойств элементарно.

Из свойства 6 следует, что сечение будет одним и тем же для всех ИМ, получаемых «сдвигом» всех первичных признаков на $\sum c_ig_i$, $g_i\in\mathscr{G}$, и соответствующим сдвигом их средних на $\sum c_iM_*g_i$.

Теорема о представлении ИМ.

Теорема 1.3. *Любая ИМ $\mathscr{M}$ представляется как объединение ее $M_*\mathscr{G}$-сечений:*

$$\mathscr{M}=\bigvee_{M_*\mathscr{G}}\mathscr{M}_{M_*\mathscr{G}},\tag{1.11}$$

где $\mathscr{G}$ есть любой взятый набор признаков, а объединение производится по значениям M_*g в интервалах $\underline{M}g\leqslant M_*g\leqslant\overline{M}g$, $g\in\mathscr{G}$.

Доказательство теоремы вынесено в дополнение 1 в конец параграфа.

Замечание. В объединении (1.11) вполне можно допустить M_*g пробегающими значения от $-\infty$ до ∞, так как при $M_*g<\underline{M}g$ или $M_*g>\overline{M}g$ сечение пусто: $\mathscr{M}_{M_*\mathscr{G}}=\varnothing$.

Если в качестве $\mathscr{G}$ взять произвольный набор $\mathscr{B}$ событий, то из теоремы следует, что каждая ИМ может быть представлена объединением ИМ с точными на наборе $\mathscr{B}$ вероятностями событий:

$$\mathscr{M}=\bigvee_{\underline{P}\mathscr{B}\leqslant P_*\mathscr{B}\leqslant\overline{P}\mathscr{B}}\mathscr{M}_{P_*\mathscr{B}},$$

где $P_*\mathscr{B}=\{P_*(B),\ B\in\mathscr{B}\}$ — обозначение совокупности вероятностей, причем $\underline{P}\mathscr{B}$ — нижних и $\overline{P}\mathscr{B}$ — верхних вероятностей.

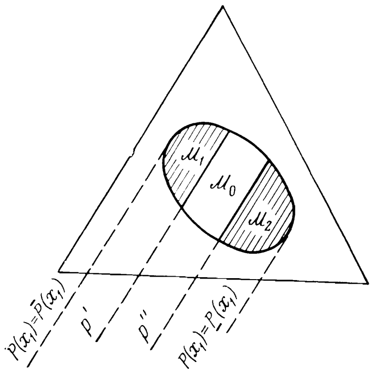


Рис. 1.9. Представление модели сечениями

Геометрическое толкование теоремы о представлении видно из рис. 1.8 и 1.9: $\mathscr{M}$ описывается последовательностью параллельных отрезков, полученных пересечением прямых $\langle M_*g\rangle$ с телом модели $\mathscr{M}$. Это при одной g. Если их несколько, то сечение сечений будет давать все более мелкие элементы (вплоть до атомов модели, а для дискретных пространств — векторов вероятностей, и тогда $\mathscr{M}$ представляется как семейство атомарных моделей — векторов вероятностей). Сказанное формулируется в виде следствия.

Следствие 1. $\langle\tilde{M}\mathscr{G}\rangle=\bigvee\limits_{\langle M_*\mathscr{G}\rangle\subset\langle\tilde{M}\mathscr{G}\rangle}\langle M_*\mathscr{G}\rangle$.

Здесь $\langle M_*\mathscr{G}\rangle$ — простые модели, определенные точными значениями M_*g, $g\in\mathscr{G}$. Таким образом, модели с первичными средними $\tilde{M}g$, $g\in\mathscr{G}$, представляются как семейства моделей с точными значениями M_*g, $g\in\mathscr{G}$, такими, что $M_*g\leqslant\tilde{M}g$.

Следствие 1, очевидно, останется в силе, если вместо $\mathscr{G}$ взять любой включающий $\mathscr{G}$ набор признаков. А также любой набор признаков и событий, из которого линейными преобразованиями (или их замыканиями) может быть получен каждый признак из $\mathscr{G}$. В частности, если это система событий, то имеем утверждение.

Следствие 2. *Если все признаки набора $\mathscr{G}$ измеримы относительно системы $\mathscr{A}$ множеств* (т. е. представляются как конечные линейные комбинации индикаторов событий $\mathscr{A}$ или их замыкания относительно равномерной сходимости), *то*

$$\langle\tilde{M}\mathscr{G}\rangle=\bigvee_{\langle P_*\mathscr{A}\rangle\subset\langle\tilde{M}\mathscr{G}\rangle}\langle P_*\mathscr{A}\rangle.$$

Согласно этому следствию ИМ представляется как семейство точных на $\mathscr{A}$ распределений вероятностей. Если $\mathscr{A}$ есть алгебра или кольцо событий, то это будут конечно-аддитивные распределения вероятностей. А интересно, что будет, если $\mathscr{A}$ — сигма-алгебра, т. е. алгебра, замкнутая относительно счетных объединений? Тогда все равно ИМ представляется как семейство $\mathscr{A}$-точных распределений вероятностей, но это будут опять же в основном конечно-аддитивные распределения (!).

Можно сделать вывод, что счетно-аддитивные распределения сами по себе являются слишком редким исключением в «семье» распределений вероятностей, чтобы ими можно было описать многие ИМ (в частности, конечной размерности). Причем расширение системы $\mathscr{A}$ с целью дробления ею пространства $\mathscr{X}$ на все более мелкие части, а отсюда логический переход к борелевским сигма-алгебрам, и к более мелким лебеговским, хотя и несколько увеличивает описательные возможности счетно-аддитивных распределений, в принципиальной своей основе вывода не меняет.

Изюмина, скрытая в следствиях 1 и 2, состоит в том, что неустойчивые в статистическом смысле явления описываются в виде семейств точных моделей, соответствующих устойчивым явлениям, в частности, с помощью семейств точных распределений вероятностей. Неустойчивость статистическая взаимно «перекачи-

8

вается» в неустойчивость информационную, в наше незнание точных законов, неизвестность выбора. На первый взгляд, парадоксальный вывод, но на самом деле вполне естественный, так как в обоих случаях при независимых повторах в пределе будем получать разные средние арифметические, а это же и средние в интервальном их понимании.

Определение ИМ задающими сечениями. Только что говорилось о том, что можно мыслить себе ИМ в виде объединения или семейства более мелких ее частей — моделей. Но ведь это есть и способ задания $\mathscr{M}$, если ее исходно определять не через свои средние $\bar{M}f$, а как объединение более простых по описанию задающих ее моделей $\mathscr{M}^*_\theta : \mathscr{M} = \bigvee_\theta \mathscr{M}^*_\theta$. Простых в том смысле, что для них легко находятся средние $\bar{M}^*_\theta f$. Тогда $\bar{M}f = \sup_\theta \bar{M}^*_\theta f$. Это один из способов непрямого задания ИМ, различные аспекты которого здесь и обсуждаются.

Сначала рассмотрим тот случай, когда $\mathscr{M}^*_\theta$ являются $M^*\mathscr{G}$-точными, а роль многомерного параметра θ выполняет сам набор средних M^*g, $g\in\mathscr{G}$. Запишем

$$\mathscr{M} = \bigvee_{M^*\mathscr{G}} \mathscr{M}^*_{(M^*\mathscr{G})}. \tag{1.12}$$

Справа символ $M^*\mathscr{G}$ сознательно заключен в круглые скобки, чтобы указать на тот факт, что для $\mathscr{M}^*_{(M^*\mathscr{G})}$ средние от признаков $g\in\mathscr{G}$ являются точными, равными значению соответствующего параметра: $M^*_{(M^*\mathscr{G})}g = M^*g$, так и на то, что в отличие от (1.11) «параметры» не обязаны пробегать все значения из $[\underline{M}g, \bar{M}g]$, $g\in\mathscr{G}$, а $\mathscr{M}^*_{(M^*\mathscr{G})}$ в свою очередь не обязательно должны быть $M\mathscr{G}$-сечениями модели $\mathscr{M}$. Как это хорошо видно из рис. 1.9, где $\mathscr{M} = \mathscr{M}_0 \vee \mathscr{M}_1 \vee \mathscr{M}_2$ может быть задана сечениями лишь ее частей $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ и здесь, если даже сечения $\mathscr{M}_0$ задавать пустыми, то все равно $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \vee \mathscr{M}_2$, т. е. выпуклая оболочка $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ (или сечений) определит $\mathscr{M}$.

В формуле (1.12) $\mathscr{M}^*_{(M^*\mathscr{G})}$ будем называть *задающими модель сечениями*. Рассмотрим пример.

Пример 1.12. Пусть $\mathscr{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ — три элементарных исхода и $\mathscr{M}$ интерпретируется как выпуклое семейство векторов вероятностей **P**. Насколько видно из рис. 1.9, описание $\mathscr{M}$ первичными средними, эквивалентное описанию контура $\mathscr{M}$ касательными линиями (которых бесконечно много), является неудобным. В то же время каждое ее $P^*(x_1)$-сечение $\mathscr{M}^*_{P^*(x_1)}$ есть довольно простая по структуре ИМ, задаваемая точной вероятностью $P^*(x_1)$ и пределами изменения $P^*(x_2): \underline{P}_{P^*(x_1)}(x_2) \leqslant P^*(x_2) \leqslant \bar{P}_{P^*(x_1)}(x_2)$, зависящими, в общем, от $P^*(x_1)$. Сечения $\mathscr{M}^*_{P^*(x_1)}$ будут задающими для $\mathscr{M} = \bigvee_{P^*(x_1)} \mathscr{M}^*_{P^*(x_1)}$, нужно указать лишь пределы изменения параметра $P^*(x_1)$ либо в диапазоне от $\underline{P}(x_1)$ до $\bar{P}(x_1)$, соответствующем $\mathscr{M}$, либо в более узких двух диапазонах $[\underline{P}(x_1), p']$ и $[p'', \bar{P}(x_1)]$, соответствующих отдельно $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$, обозначенным на рис. 1.9.

Вернемся к формуле (1.12). Пусть модели $\mathscr{M}^*_{(M^*\mathscr{G})}$ описываются помимо значений M^*g, $g\in\mathscr{G}$, (разных для разных моделей) все одними и теми же верхними первичными средними $\tilde{M}h$, $h\in\mathscr{H}$:

$$\mathscr{M}^*_{(M^*\mathscr{G})} = \langle \tilde{M}\mathscr{H}\rangle \wedge \langle M^*\mathscr{G}\rangle.$$

Тогда их объединение по изменениям M^*g, $g\in\mathscr{G}$, ограниченным сверху числами $\tilde{M}g$, $g\in\mathscr{G}$, определит ИМ $\mathscr{M}$, первичными для которой будут те же самые $\tilde{M}\mathscr{H}$, и плюс к этому, $\tilde{M}\mathscr{G}$, что формально записывается:

$$\mathscr{M} = \bigvee_{M^*g\leqslant \tilde{M}g,\ g\in\mathscr{G}} (\langle\tilde{M}\mathscr{H}\rangle \wedge \langle M^*\mathscr{G}\rangle) = \langle\tilde{M}\mathscr{H}\rangle \wedge \langle\tilde{M}\mathscr{G}\rangle.$$

Поясним сказанное. Пусть $\mathscr{G} = g$ и изобразим на рис. 1.10 M^*g-сечение как плоский многогранник $\mathscr{M}^*_{(M^*g)}$ на гиперплоскости точного значения M^*g. Если его грани $\tilde{M}h_j$ не меняются при M^*g-«сдвигах», то они сохраняются и для фигуры $\mathscr{M}$, полученной в результате параллельного перемещения этого плоского многогранника при изменении M^*g от $\underset{\sim}{M}g$ до $\tilde{M}g$. Плюс к этому две грани будут соответствовать «крайним» значениям $M^*g = \underset{\sim}{M}g$ и $M^*g = \tilde{M}g$. Кстати, расположенные на них многогранники полностью описывают $\mathscr{M}$: $\mathscr{M} = \mathscr{M}^*_{(\underset{\sim}{M}g)} \vee \mathscr{M}^*_{(\tilde{M}g)}$. Подобная редукция описания возможна при любом наборе $\mathscr{G}$.

Несколько более общий случай по сравнению с предыдущим будет иметь место, если (при прежних остальных условиях) $\tilde{M}_{(M^*\mathscr{G})}h$ зависят от M^*g_i, $g_i\in\mathscr{G}$, и линейно меняются при их изменениях:

$$\tilde{M}_{(M^*\mathscr{G})}h = \tilde{m}_h + \sum c_i(h)\, M^*g_i, \quad h\in\mathscr{H},$$

где коэффициенты $c_i(h)$ зависят от h. На рис. 1.10 это будет выглядеть как изменение направления движения при смещении плоского многогранника, что вызовет и изменение итогового положения граней $\mathscr{M}$, соответствующих признакам h сечений, а значит, и самих h, которые переходят в $h - \sum c_i(h) \times g_i$ со значениями $\tilde{M}[h - \sum c_i(h) g_i] = \tilde{m}_h$, $h\in\mathscr{H}$. Эти первичные средние вместе с $\underset{\sim}{M}g$, $\tilde{M}g$, $g\in\mathscr{G}$, и определят $\mathscr{M}$. Рассмотрим пример такого представления.

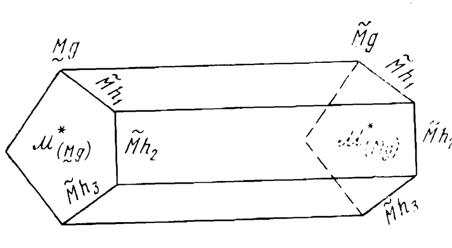


Рис. 1.10. Формирование граней модели

Пример 1.13. Пусть на $\mathcal{R}$ задающие сечения $\mathcal{M}^*_{(M^*X)}$ при каждом фиксированном M^*X заданы средними $\bar{M}^*_{(M^*X)}X^2=\tilde{m}_2+M^*X$. Здесь в принятых выше обозначениях $g(x)=x$, $h(x)=x^2$. Тогда объединения сечений по параметру M^*X, меняющемуся в пределах $\underset{\sim}{M}X\leqslant M^*X\leqslant \bar{M}X$, образует ИМ с первичными средними: $\bar{M}(X^2-X)=m_2$, $\underset{\sim}{M}X$, $\widetilde{\bar{M}X}$.

Мы рассмотрели тот случай, когда первичные средние $M^*\mathcal{G}$-сечений зависят от $M^*\mathcal{G}$. Другой способ — сделать зависящим от $M^*\mathcal{G}$ сам вид первичных признаков $h_{M^*\mathcal{G}}$ задающих сечений.

Пример 1.14. Задание случайной величины средним и дисперсией. *Дисперсия* есть мощность центрированной к точно нулевому среднему с. в. $\bar{\sigma}^2=\bar{M}(X-MX)^2$. В общем случае нельзя определить дисперсию. Можно сделать это только при допущении о точных MX, т. е. для M^*X-сечений $\mathcal{M}^*_{(M^*X)}$ модели, задавая для них $\bar{M}^*_{(M^*X)}(X-M^*X)^2=\widetilde{\sigma}^2_{(M^*X)}$. Объединение сечений по M^*X и даст модель случайной величины, заданной пределами $\underset{\sim}{M}X$, $\bar{M}X$ изменения среднего и (при каждом M^*X) верхней дисперсией $\widetilde{\bar{\sigma}}^2_{(M^*X)}$.

Преобразуя в каждом сечении выражение для дисперсий с учетом того, что M^*X является точным, имеем: $\widetilde{\bar{\sigma}}^2_{(M^*X)}=\bar{M}^*_{(M^*X)}(X-M^*X)^2=\hat{M}^*_{(M^*X)}X^2-(M^*X)^2$, или $\bar{M}^*_{(M^*X)}X^2=\widetilde{\bar{\sigma}}^2_{(M^*X)}-(M^*X)^2$. Отсюда следует, что первичный признак $h(x)=(x-M^*X)^2$ для M^*X-сечений эквивалентным образом заменяется на x^2 с первичным значением $\widetilde{\bar{\sigma}}^2_{(M^*X)}-(M^*X)^2$, зависящим от M^*X нелинейно.

Данная методика может быть продолжена на задание ИМ интервальными центральными моментами и куммулянтами.

Представление через стандартную ИМ. Вернемся к общему представлению: $\mathcal{M}=\bigvee\mathcal{M}_\theta$, частными случаями которого являются как запись ИМ в виде выпуклой оболочки простых распределений (вершин), так и в виде объединения сечений. Хорошо бы, чтобы все задающие $\mathcal{M}_\theta$ имели одинаковую, достаточно простую структуру.

Остановимся на том случае, когда все $\mathcal{M}_\theta$ получаются несложным образом из одной $\mathcal{M}_0$, называемой *стандартной*. Для этого наводится зависящее от θ соответствие между признаками $f\leftrightarrow f_\theta$ так, чтобы их средние для стандартной и задающей ИМ совпали: $\bar{M}_0 f=\bar{M}_\theta f_\theta$, при этом не нарушив согласованности. Тогда для нахождения $\bar{M}_\theta\varphi$ достаточно выявить соответствующий φ признак f (при заданном θ) и взять от него среднее $\bar{M}_0 f$.

Рассмотрим более строго вопрос, каким в этой схеме должно быть соответствие между признаками, как они связываются между собой? Пусть стандартная $\mathcal{M}_0$ определяется своими средними $\bar{M}_0 f$, $f\in\mathcal{F}$, и зададим $\mathcal{M}_\theta$ значениями

$$\bar{M}_\theta f=\bar{M}_0(\mathrm{L}_\theta f), \tag{1.13}$$

где L_θ — оператор, отображающий область $\mathcal{F}_\theta$ существования $\mathcal{M}_\theta$ в область $\mathcal{F}_0$ существования $\mathcal{M}_0$: $\mathcal{F}_\theta\xrightarrow{\mathrm{L}_\theta}\mathcal{F}_0$, $\theta\in\Theta$.

Утверждение 1.4. *Средние в формуле (1.13) будут согласованными, если оператор* L_θ *обладает следующими двумя свойствами: а) линейностью* $\mathrm{L}_\theta(c_1f_1+c_2f_2+c)=c_1\mathrm{L}_\theta f_1+c_2\mathrm{L}_\theta f_2+c$; *б) сохранением порядка* $f_1\geqslant f_2\Rightarrow \mathrm{L}_\theta f_1\geqslant \mathrm{L}_\theta f_2$.

Нужно доказать, что для границ, выраженных (1.13), выполняются аксиомы ИМ (см. стр. 15). Очевидны **A1** и **A4**. Далее, $b\geqslant 0\Rightarrow \bar{M}_\theta(bf+c)=$ $=\bar{M}_0\mathrm{L}_\theta(bf+c)=\bar{M}_0(b\mathrm{L}_\theta f+c)=b\bar{M}_0\mathrm{L}_\theta f+c=b\bar{M}_\theta f+c$, и доказана **A2**. Наконец, **A3** следует из соотношений $\bar{M}_\theta(f+g)=\bar{M}_0\mathrm{L}_\theta(f+g)\leqslant \bar{M}_0\mathrm{L}_\theta f+\bar{M}_0\mathrm{L}_\theta g=\bar{M}_\theta f+\bar{M}_\theta g$, что и доказывает утверждение.

Из свойств линейности и сохранения порядка оператора L_θ следует, что если первичным набором стандартной ИМ $\mathcal{M}_0=$ $=\langle\bar{M}_0\mathcal{G}\rangle$ является $\mathcal{G}$, то первичными наборами для $\mathcal{M}_\theta$ будут $\mathcal{G}_\theta=\{g_\theta:\ \mathrm{L}_\theta g_\theta=g,\ g\in\mathcal{G}\}$ со средними $\bar{M}_\theta g_\theta=\bar{M}_0 g$, где $\mathrm{L}_\theta g_\theta=g$.

Функциональные представления. Рассмотрим один частный случай предыдущего представления. Для этого обратимся к записи x в виде отображения $x=\mathrm{V}_\theta\xi$, где V_θ — известный оператор, зависящий от неизвестного параметра θ, принимающего значения из множества Θ. Такие записи обычны в задачах обнаружения и выделения сигналов, в которых шум ξ (вектор или процесс) действует в канале связи, описываемом оператором V_θ, где θ — неизвестный одномерный или многомерный параметр канала (или параметры сигнала и шума), а x — получаемые в результате векторные или в виде процесса наблюдения. Задана ИМ «шума» $\mathcal{M}_0^\xi$, играющая роль стандартной. Требуется составить ИМ $\mathcal{M}^x$ наблюдений.

Если оператор V_θ при каждом θ отображает «реализации» ξ в «реализации» x взаимно-однозначным образом, тогда L_θ, заданный так: $\mathrm{L}_\theta f(x)=f(\mathrm{V}_\theta\xi)$, будет удовлетворять посылам утверждения 1.4. Равенства $\bar{M}^x_\theta f(x)=\bar{M}^\xi_0 f(\mathrm{V}_\theta\xi)$ согласно (1.13) породят серию ИМ $\mathcal{M}_\theta^x$, объединение которых по θ даст модель $\mathcal{M}^x$ наблюдений, определяемую средними

$$\bar{M}f(x)=\sup_\theta \bar{M}^x_\theta f(x)=\sup_\theta \bar{M}^\xi_0 f(\mathrm{V}_\theta\xi).$$

Пример 1.15. В задачах радиолокации и связи смесь сигнала ϖ_t, где t есть время, с шумом ξ_t часто записывается в виде: $X_t=\theta\varpi_t+\xi_t$, в котором $\theta\geqslant 0$ — неизвестная амплитуда сигнала. Пусть шум ξ_t описывается ИМ $\mathcal{M}_0$. Тогда модель $\mathcal{M}_\theta$ наблюдений X_t при каждом заданном θ определяется следующими значениями: $\bar{M}_\theta f(X_t)=\bar{M}_0 f(X_t-\theta\varpi_t)$, а модель $\mathcal{M}$, равная объединению $\mathcal{M}_\theta$ по θ, — значениями $\bar{M}f=\sup_{\theta\geqslant 0}\bar{M}_0 f(X_t-\theta\varpi_t)$. Они и дадут модель $\mathcal{M}$. Здесь, если $\mathcal{M}_0=\langle\bar{M}_0\mathcal{G}\rangle$ имеет первичным набором множество $\mathcal{G}$ функционалов, то первичными признаками $\mathcal{M}_\theta$ будут $g_\theta=g(X_t-\theta\varpi_t)$ с теми же первичными средними, что и заданы на $\mathcal{G}$: $\bar{M}_\theta g(X_t-\theta\varpi_t)=\bar{M}_0 g$.

Плотность. Рассматривается способ выразить одну ИМ через другую, стандартную, с помощью функции $p(x)$ переменной x.

Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда $\mathcal{X}=\mathcal{R}$, и на первичном кольце $\mathcal{K}_\Sigma$ всех отрезков задано конечно-аддитивное распределение $\mathscr{P}_1$ точными вероятностями $P_1[x, y)$, $x<y\in\mathscr{R}$. Плотность вероятностей по отношению к другому такому же $\mathscr{K}_\Sigma$-точному распределению $\mathscr{P}_0$ с вероятностями $P_0[x, y)$ задается формулой

$$p(x)=\lim_{y\downarrow x}\frac{P_1[x,\ y)}{P_0[x,\ y)}.$$

Плотность определена, если этот предел существует для всех x, кроме, может быть, множества точек $\mathscr{P}_0$-вероятности 0 (здесь $\mathscr{P}_0$ может вполне быть заменено на любую $\mathscr{K}_\Sigma$-точную меру, но удобней всего для этих целей мера длины, определенная как $P_0[a,\ b)=b-a$).

Смысл плотности вероятностей прозрачен сквозь призму аналогии с плотностью массы физического вещества, только слово «масса» заменяется на «меру» или вероятность. Точно такую же аналогию имеет плотность, когда $\mathscr{X}=\mathscr{R}^n$ (т. е. рассматривается случайный вектор). Тогда $p(x)$ есть предел отношения вероятностей непосредственных окрестностей точки x, в которых место отрезков занимают n-мерные брусы при неустанном уменьшении сторон брусов.

Если плотность $p(x)$ существует, то среднее по распределению $\mathscr{P}_1$ будет

$$M_1 g=\int g(x)\,p(x)\,dP_0(x)=M_0\,gp$$

для всех интегрируемых по Риману — Стилтьесу функций $g(x)$, которые и образуют класс $\mathscr{L}\mathscr{K}_0$ вторичных признаков. Для любых же признаков f среднее $\overline{M}f$ определяется как верхняя грань Mg для всех $g\leqslant f$, $g\in\mathscr{L}\mathscr{K}_0$, откуда и следует формула

$$\overline{M}_1 f=\overline{M}_0 fp,\quad fp\in\mathscr{F}, \tag{1.14}$$

где $\mathscr{F}$ — область существования средних для $\mathscr{P}_0$.

Из (1.14), если взять в качестве $f(x)$ индикаторную функцию отрезка $[x,\ y)$ (бруса) и устремить $y\downarrow x$, очевидно, будет следовать исходное определение плотности.

Возьмем (1.14) за основу формального определения плотности одной ИМ $\mathscr{M}_1$ (не обязательно точной) по отношению к другой $\mathscr{M}_0$. Считаем, что $\mathscr{M}_0$ имеет областью существования верхних средних класс $\mathscr{F}$ функций, а $\mathscr{M}_1$ — класс $\mathscr{F}_1=\{f/p:f\in\mathscr{F}\}\cup\mathscr{F}_0$, где $\mathscr{F}_0$ — все ограниченные сверху функции (добавление их к $\mathscr{F}_1$ нужно тогда, когда $p=\infty$ в некоторой области, так как в ней $f/p=0$).

Чтобы формула (1.14) задавала согласованные средние на признаках из $\mathscr{F}_1$, необходимо и достаточно, выполнения двух условий:

а) функция $p(x)$ неотрицательна: $p(x)\geqslant 0$;

б) среднее от функции $p(x)$ точное и равно 1:

$$\underline{M}_0\,p=\overline{M}_0\,p=1.$$

Функция $p(x)$, определенная уравнением (1.14), называется *формальной плотностью* $\mathscr{M}_1$ по $\mathscr{M}_0$ и обозначается $p(x)=\mathscr{M}_1/\mathscr{M}_0$.

Формальная плотность, если она существует, определена почти однозначно в том смысле, что если p_1 и p_2 — два варианта плотности, то событие, на котором они не равны друг другу, является $\mathscr{M}_0$-нулевым: $\overline{P}_0(p_1\neq p_2)=0$.

В самом деле, пусть $N=\{x:p_1\leqslant p_2\}$. Тогда из неравенств $\overline{M}_0(p_1-p_2)N\leqslant 0$ и $\overline{M}_0(p_1-p_2)N\geqslant\overline{M}_0p_1N-\overline{M}_0p_2N=0$ следует $M_0(p_1-p_2)N=0$, откуда $\overline{P}_0(N)=0$. Поменяв p_1 и p_2 местами, находим $\overline{P}_0(N')=0$, где $N'=\{x:p_1>p_2\}$. Объединяя N и N', получаем $\overline{P}_0(N\cup N')=0$, что и доказывает утверждение.

Событие N_0, нулевое для $\mathscr{M}$, обязано быть нулевым для $\mathscr{M}_1$: $\overline{P}_0(N_0)=0\Rightarrow\overline{P}_1(N_0)=\overline{M}_0N_0p=0$. При этом $p(x)$ на N_0 может в принципе быть любым, даже принимать значение $+\infty$ (так как $0\cdot\infty=0$). Более того, нулевым обязано быть событие на котором $p(x)=\infty$.

Если p есть формальная плотность $\mathscr{M}_1$ по $\mathscr{M}_0$ и $p>0$, то $1/p$ будет формальной плотностью $\mathscr{M}_0$ по $\mathscr{M}_1$:

$$p=\mathscr{M}_1/\mathscr{M}_0>0\Rightarrow 1/p=\mathscr{M}_0/\mathscr{M}_1.$$

Доказательство следует из равенства $\overline{M}_1(f/p)=\overline{M}_0(fp/p)=\overline{M}_0f$, и если $p=\infty$ при $x\in N$, то отношение p/p в этой области можно считать любым от 0 до ∞.

Теорема 1.5. *Пусть первичными для $\langle\widetilde{M}_0\mathscr{G}_0\rangle$ являются признаки набора $\mathscr{G}_0$ и $M_0p(x)=1$. Тогда первичными признаками для $\langle\widetilde{M}_1\mathscr{G}_1\rangle$, формальная плотность которой по отношению к $\langle\widetilde{M}_0\mathscr{G}_0\rangle$ существует и равна $p(x)$, будут*

$$\mathscr{G}_1=\{g_1(x):g_1(x)=g(x)/p(x),\quad g(x)\in\mathscr{G}_0\}\cup\{\pm 1/p(x)\}$$

со средними на них:

$$\widetilde{M}_1(g/p)=\widetilde{M}_0\,g,\quad g\in\mathscr{G}_0;\quad \widetilde{M}_1(1/p)=-\widetilde{M}_1(-1/p)=1.$$

В самом деле, так как без ущерба $p(x)$ можно считать первичным признаком для $\langle\widetilde{M}_0G_0\rangle$ со значением $M_0p=1$, то

$$\overline{M}_1 f=\overline{M}_0 fp=\inf\left\{\left[c+c_0M_0\,p+\sum c_i^+\widetilde{M}_0\,g_i\right]:c+c_0\,p+\sum c_i^+g_i\geqslant fp\right\}=$$
$$=\inf\left\{\left[cM_1(1/p)+c_0+\sum c_i^+\widetilde{M}_0\,g_i\right]:c/p+c_0+\sum c_i^+g_i/p\geqslant f\right\}.$$

Эта формула доказывает утверждение теоремы.

Таким образом, смысл формальной плотности $\mathscr{M}_1$ по отношению $\mathscr{M}_0$ состоит в пересчете вида первичных признаков $g_i\to g_i/p$, $p\to 1/p$, при одинаковых первичных средних, что может рассматриваться как взаимно-однозначное соответствие первичных признаков моделей. При этом достаточно рассматривать только те из них, первичные средние которых являются согласованными.

Рассмотрим следствия теоремы.

Следствие 1. *Область существования $\mathscr{F}_1$ верхних средних ИМ $\mathscr{M}_1$, формальная плотность которой по отношению к $\langle\widetilde{M}_0\mathscr{G}_0\rangle$*

равна $p(x)$, составляет множество признаков, мажорируемых конечными линейными комбинациями вида $c+\sum c^+_i g_i/p$, $g_i \in \mathcal{G}_0$. Признаки из $\mathcal{F}_1$ представимы в виде $f=\sum c^+_i g_i/p+f_0$, где $g_i \in \mathcal{G}_0$, а f_0 — ограниченный сверху признак.

Следствие 2.

$$p=\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_0=\mathcal{M}'_1/\mathcal{M}'_0 \Rightarrow p=(\mathcal{M}_1 \wedge \mathcal{M}'_1)/(\mathcal{M}_0 \wedge \mathcal{M}'_0).$$

Можно сделать вывод, что для существования формальной плотности $p=\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_0$ необходимо, чтобы $\mathcal{M}_0$ имела более богатый первичный набор, чем $\mathcal{M}_1$. Частное $\mathcal{G}/p$ приводит к потере данных о признаках набора $\mathcal{G}$ по крайней мере в той области, где $p(x)=0$. Отсюда размерность модели $\mathcal{M}_1$ должна быть никак не выше размерности $\mathcal{M}_0$. При $p(x)>0$, $\forall x$, размерности должны быть одинаковыми, а первичные наборы в известном смысле эквивалентными.

Рассмотрим примеры определения формальной плотности для ИМ, не являющейся точным распределением вероятностей.

Пример 1.15. Пусть $\mathcal{M}_0$ — моментная ИМ, определенная начальными моментами $\overline{M}_0 X^i$, $i=1, \ldots, k$, верхними и потому неточными, кроме одного, $\overline{M}_0 X^2 = M_0 X^2 = \underset{\sim}{M}_0 X^2$, с обязательно точным значением. Функция $p(x)=x^2$ будет формальной плотностью $x^2=\mathcal{M}_1/\mathcal{M}_0$ для такой $\mathcal{M}_1$, первичными средними которой являются $M_1(1/X^2)=1$, $\overline{M}_1(1/X)=\overline{M}_0 X$, $\overline{M}_1 X=\overline{M}_0 X^3$, ..., $\overline{M}_1 X^{k-2}=\overline{M}_0 X^k$. Областью существования $\mathcal{F}_1$ будет множество признаков вида $c+\sum_1^k c^+_i X^{i-2}+f_0$, $f_0 \in \mathcal{F}_0$. В этом примере, так как $p(x)>0$ при $x\neq 0$ функция $1/p(x)=1/x^2$ будет формальной плотностью $\mathcal{M}_0$ по отношению к $\mathcal{M}_1$, если исключить из числовой прямой, на которой они заданы, точку 0.

Отметим, что плотность одного ИРВ относительно другого может существовать лишь для точных распределений, так как требование $M_0 p = M_1(1/p)=1$ исключает какие-либо отклонения.

Дополнения. 1. Доказательство теоремы о представлении. Докажем сначала теорему для сечения $\mathcal{M}$ одномерным параметром Mg. На основании определения операции объединения достаточно доказать равенство

$$\max_{\underline{M}g \leqslant Mg \leqslant \overline{M}g} \overline{M}_{Mg} f = \overline{M} f.$$

Обозначим левую часть $\overline{\overline{M}}f$. Подставляя в нее формулу (1.9), получаем:

$$\overline{\overline{M}}f = \max_{\underline{M}g \leqslant Mg \leqslant \overline{M}g} \min_c [\overline{M}(f-cg)+cMg] = \max_{Mg} \min_c W(c, Mg).$$

Функция $W(c, Mg)$ линейна (и следовательно, вогнута) по Mg и выпукла по параметру c, так как для $0 \leqslant \gamma \leqslant 1$:

$$W(\gamma c_1+(1-\gamma)c_2, Mg) = \overline{M}[\gamma f - \gamma c_1 g + (1-\gamma) f + (1-\gamma) c_2 g] +$$
$$+ [\gamma c_1 + (1-\gamma) c_2] Mg \leqslant \gamma \overline{M}(f-c_1 g) + \gamma c_1 Mg +$$
$$+ (1-\gamma) \overline{M}(f-c_2 g) + (1-\gamma) c_2 Mg = \gamma W(c_1, Mg) + (1-\gamma) W(c_2, Mg).$$

Поэтому, используя известную теорему о минимаксе [22], без изменения результата максимум и минимум можно менять местами. Получаем

$$\overline{\overline{M}}f = \min_c \max_{Mg} W(c, Mg) = \min_c [\overline{M}(f-cg) + \max\{c\underline{M}g, c\overline{M}g\}],$$

и это равно $\overline{M}f$, поскольку минимум достигается при $c=0$ (в самом деле, при $c \geqslant 0$: $\overline{M}(f-cg)+\max\{c\underline{M}g, c\overline{M}g\} = \overline{M}(f-cg)+c\overline{M}g \geqslant \overline{M}f - c\overline{M}g + c\overline{M}g = \overline{M}f$ и то же самое неравенство справедливо при $c \leqslant 0$). Теорема доказана для случая, когда $\mathcal{G}$ состоит всего из одного признака.

По индукции теорема распространяется на случай, когда $\mathcal{G}=\mathcal{G}_k$ есть конечный набор. Наконец, для произвольного набора $\mathcal{G}$, если обозначить

$$\overline{\overline{M}}f = \sup_{M\mathcal{G}} \overline{M}_{M\mathcal{G}} f = \sup_{M\mathcal{G}} \inf_{\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}} \overline{M}_{M\mathcal{G}_k} f,$$

то нужно доказать равенство $\overline{\overline{M}}f=\overline{M}f$. Признаку f такому, что $|\overline{M}f|<\infty$ (откуда $|\overline{M}_{M\mathcal{G}}f|<\infty$), и фиксированному $\varepsilon>0$ всегда найдутся такие k' и конечный набор $\mathcal{G}_{k'}$, что

$$\inf_{\mathcal{G}_k \subset \mathcal{G}} \overline{M}_{M\mathcal{G}_k} f \geqslant \overline{M}_{M\mathcal{G}_{k'}} f - \varepsilon.$$

Отсюда

$$\overline{\overline{M}}f \geqslant \sup_{M\mathcal{G}_{k'}} \overline{M}_{M\mathcal{G}_{k'}} f - \varepsilon = \overline{M}f - \varepsilon.$$

В то же время $\mathcal{M}_{M\mathcal{G}} \subset \mathcal{M}$, откуда получается $\bigvee_{M\mathcal{G}} \mathcal{M}_{M\mathcal{G}} \subset \mathcal{M}$ и $\overline{\overline{M}}f \leqslant \overline{M}f$. Окончательно, для любого признака f из области существования средних $\mathcal{F}$ имеем $|\overline{\overline{M}}f - \overline{M}f| \leqslant \varepsilon$, и утверждение теоремы следует из произвольности ε. Доказательство закончено.

2. Пример пересчета по формуле (1.13). Пусть $y=V_\theta(x)$ есть взаимно-однозначное отображение $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$: $\mathcal{X} \xrightarrow{V_\theta} \mathcal{X}$. Тогда оператор $L_\theta f(x) = f(V_\theta(x))$, очевидно, будет обладать требуемыми свойствами а) и б) утверждения 1.4. В линейных пространствах $\mathcal{X}$ (например, если $\mathcal{X}=\mathcal{R}^n$) такого типа операторами являются преобразования сдвига $L_\theta f(x)=f(x-b_\theta x_0)$, $b_\theta \in \mathcal{R}$, где элемент x_0 характеризует направление сдвига. Подставляя в (1.13), получаем $\overline{M}_\theta f(x) = \overline{M}_0 f(x-b_\theta x_0)$. Здесь $\mathcal{M}_\theta$ выводится из $\mathcal{M}_0$ сдвигом всех $x \in \mathcal{X}$ на величину $b_\theta x_0$.

1.6. УСЛОВНЫЕ ИНТЕРВАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Постановка проблемы. Интервальные модели дают описания явлений, еще не происшедших. Допустим, что такое безусловное описание $\mathcal{M}$ составлено в виде совокупности согласованных средних $\overline{M}f$, $f \in \mathcal{F}$. А потом вдруг дополнительно стало известно, что произошло событие B. Оно частично, но не полностью отражает результат явления, если только не является элементарным событием. Тогда после B неопределенность останется, а явление будет описываться новой моделью $\mathcal{M}_B$, называемой *условной* при случившемся B. Условной модели соответствуют свои средние $\overline{M}_B f$.

Наличие достоверно происшедшего события B для условной модели соответствует вероятности $\underline{M}_B B(x) = \underline{P}_B(B) = 1$. Но не только это. Производится пересчет абсолютно всех средних $\overline{M} f$ в $\overline{M}_B f$, своего рода преобразование одних в другие, и как их часть — вероятностей $\overline{P}(A)$ в $\overline{P}_B(A)$. Вопрос, как?

Если событие B имеет точные вероятности $P(AB)$ и $P(B)$, то пересчет в условные хорошо известен и производится элементарно делением

$$P_B(A) = P(AB)/P(B).$$

А если неточные? Если неточной является только вероятность в числителе, то для расчета $\overline{P}_B(A)$ нужно подставить вместо нее $\overline{P}(AB)$, что соответствует супремуму отношения по $P(AB)$. По такому же принципу рассчитываются средние любых признаков.

Но как определить условные средние и вероятности, когда в знаменателе вероятность $P(B)$ является интервальной $\underline{P}(B)$, $\overline{P}(B)$? Основная трудность здесь в том, что если брать супремум правой части, то $P(AB)$ и $P(B)$ оказываются связанными: нельзя положить одновременно $P(B) = \underline{P}(B)$ и $P(AB) = \overline{P}(AB)$ (равно, как абсурдно желание, заполняя «вероятностной массой» до краев «отсек» AB, обеспечить при этом минимальное суммарное заполнение обоих отсеков AB и A^cB, составляющих B).

Определение условной интервальной модели. Начнем с рассуждений, которые и приведут нас к определению. Пусть $\mathcal{M}_{P_*(B)}$ есть $P_*(B)$-сечение $\mathcal{M}$. Вероятность события B для $\mathcal{M}_{P_*(B)}$ является точной, равной $P_*(B)$, и пусть $P_*(B) > 0$. Тогда соответствующие сечениям $\mathcal{M}_{P_*(B)}$ условные ИМ $\mathcal{M}_{P_*(B),B}$ получаются сужением области существования к признакам $f(x)B(x)$, $f \in \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — область существования $\overline{M} f$, и нормировкой всех средних на число $1/P_*(B)$, что дает

$$\overline{M}_{P_*(B),B} f = \overline{M} fB/P_*(B), \quad f \in \mathcal{F}.$$

Очевидно, определенные так средние удовлетворяют аксиомам ИМ.

Любая ИМ согласно теореме 1.3 о представлении записывается как объединение ее $P_*(B)$-сечений. Для каждого из сечений по указанной формуле находится условная ИМ, а их объединение и даст искомую условную ИМ.

Условной при случившемся событии B называется ИМ $\mathcal{M}_B$ на $\mathcal{X}$, определяемая из $\mathcal{M}$ средними:

$$\overline{M}_B f = \max_{\underline{P}(B) \leqslant P_*(B) \leqslant \overline{P}(B)} [\overline{M}_{P(B)} fB/P_*(B)], \quad f \in \mathcal{F}, \tag{1.15}$$

где $\overline{M}_{P_*(B)} fB$ есть средние для $P(B)$-сечений $\mathcal{M}_{P_*(B)} = \mathcal{M} \wedge \langle P_*(B) \rangle$ от признаков $f(x)B(x)$.

Средние по формуле (1.15) называются условными. Без труда проверяется, что они удовлетворяют аксиомам ИМ. Областью существования верхних средних условной ИМ будет класс признаков, совпадающих с функциями $\mathcal{F}$ на событии B, и произвольных (возможно, принимающих значения $\pm\infty$) вне этого события. Этот класс обозначаем $\mathcal{F}B$.

Нижние средние условной ИМ определяются по обычной формуле $\underline{M}_B f = -\overline{M}_B(-f)$.

Если $\underline{P}(B) = 0$, то правая часть (1.15) при максимуме, когда $P_*(B) = 0$, понимается как предел $P_*(B) \to 0$. Так же понимается эта формула, если событие B является нулевым, т. е. $\overline{P}(B) = 0$. Тогда

$$\overline{M}_B f = \lim_{P_*(B) \to 0} \frac{\overline{M}_{P_*(B)} fB}{P_*(B)} = \lim_{P_*(B) \to 0} \frac{P_*(B) \max_x (fB)}{P_*(B)} = \max_x fB,$$

где при любых f (и неограниченных также) функция fB считается равной нулю в области B^c. Отсюда следует, что если событие B является невозможным (в частности, $B = \varnothing$), то условная ИМ $\mathcal{M}_B$ будет B-индикаторной $\mathcal{M}_B = \mathcal{I}_B$, а именно определяемой на $\mathcal{X}$ единственным первичным средним $\overline{P}_B(B^c) = 0$.

Подстановка в (1.15) формулы (1.9) § 1.5 для средних сечения раскрывает выражение для условных средних:

$$\overline{M}_B f = \max_{\underline{P}(B) \leqslant P_*(B) \leqslant \overline{P}(B)} \frac{\min_c [\overline{M}(f - c)B + cP_*(B)]}{P_*(B)}. \tag{1.16}$$

Дадим примеры расчета по этой формуле.

Пример 1.16. Расчет условных вероятностей ИРВ. Пусть f в (1.16) есть $A(x)$. Тогда минимум по c в квадратных скобках выражения (1.16) будет достигаться либо при $c=0$, либо при $c=1$, в результате чего $\overline{M}_{P_*(B)} AB = \min\{\overline{P}(AB),\ P_*(B) - \underline{P}(A^cB)\}$. Подстановкой данной формулы в (1.15) находятся верхние условные вероятности: $\overline{P}_B(A) = \overline{P}_B(AB) = \overline{M}_B AB =$

$$= \max_{\underline{P}(B) \leqslant P_*(B) \leqslant \overline{P}(B)} \min\left\{\frac{\overline{P}(AB)}{P_*(B)},\ 1 - \frac{\underline{P}(A^cB)}{P_*(B)}\right\} = \frac{\overline{P}(AB)}{\overline{P}(AB) + \underline{P}(A^cB)},$$

где использован тот факт, что максимум достигается при равенстве членов под знаком минимума.

Пример 1.17. Пусть $\mathcal{M}$ на $\mathcal{R}$ определена двумя первичными средними $\underline{M}|X|$, $\overline{M}|X|$ и пусть $B = [a, b]$, $0 < a < b$. Без труда находятся $\underline{P}(B) = 0$ $\overline{P}(B) = \min\{1, \overline{M}|X|/a\}$. При заданном $P_*(B)$ для сечения имеем

$$\overline{M}_{P_*(B)} fB = \inf_{c + (c_1^+ - c_2^+)|x| + c_3 B(x) \geqslant f(x)} [c + c_1^+ \overline{M}|X| - c_2^+ \underline{M}|X| + c_3 P_*(B)].$$

Например, для события $D = [d_1, d_2] \subset B$ по этой формуле получаем

$$\overline{M}_{P_*(B)} D = \min\{\overline{M}|X|/c_1,\ P_*(B)\}, \quad \underline{M}_{P_*(B)} D = 0,$$

откуда, если $D\neq B$ и $D\neq\varnothing$, находим $\underline{M}_B D=0$ и

$$\overline{M}_B D=\overline{P}_B(D)=\max_{P_*(B)}\min\left\{\frac{\overline{M}\,|X|}{d_1 P_*(B)},\ 1\right\}=\min\left\{\frac{\overline{M}\,|X|}{d_1 \underline{P}(B)},\ 1\right\}=1.$$

Таким образом, границы для всех условных вероятностей событий в данном примере тривиальны. В случае $f(x)=|x|$ имеем:

$$\underline{M}_B\,|X|=\min_{0\leqslant P_*(B)\leqslant\overline{P}(B)}\underline{M}\,|X|/P_*(B)=\underline{M}\,|X|/\overline{P}(B)=\frac{\underline{M}\,|X|}{\min\{\overline{M}\,|X|/a,\ 1\}};$$

$$\overline{M}_B\,|X|=\max_{0\leqslant P_*(B)\leqslant\overline{P}(B)}\overline{M}\,|X|/P_*(B)=\infty,$$

и, в частности, при $\overline{M}|X|>a$ получаем $\underline{M}_B|X|=a\underline{M}|X|/\overline{M}|X|$.

Для другого события $B_1=[-a,\ a]$ при тех же первичных средних имеем $\underline{P}(B_1)=[1-\overline{M}|X|/a]^+$, $\overline{P}(B_1)=1$, и если это событие произошло, то условные вероятности уже не будут, как выше, тривиальными, так как, например, для события $D_1=[-d,\ d]$, $d<a$:

$$\underline{P}_{B_1}(D_1)=[1-\overline{M}|X|/d]^+/[1-\overline{M}|X|/a]^+,\ \overline{P}_{B_1}(D_1)=1.$$

Без труда находятся средние от функции $|X|$:

$$\underline{M}_{B_1}\,|X|=\underline{M}|X|,\quad \overline{M}_{B_1}|X|=1/[1/\overline{M}|X|-1/a]^+.$$

Расчет условных моделей через вершины. Здесь рассматривается частный случай, но он позволяет нарисовать ясную наглядную картину условных моделей.

Пусть пространство $\mathscr{X}=\{x_1,\ \ldots,\ x_r\}$ конечно и $\mathscr{M}$ есть ИМ на нем. Обозначим $\mathbf{P}_\theta=(P_\theta(x_1),\ \ldots,\ P_\theta(x_r))$ — все векторы вероятностей, являющиеся вершинами (крайними точками) $\mathscr{M}$, так что $\mathscr{M}=\bigvee\mathbf{P}_\theta$. Соответствующие каждому $\mathbf{P}_\theta$ вероятности $P_\theta(B)=\sum\limits_{x_i\in B}P_\theta(x_i)$ являются точными, потому объединение перегруппируется как запись $\mathscr{M}$ через $P(B)$-сечения, если каждое сечение представить набором вершин — векторов $\mathbf{P}_\theta$ с одинаковыми $P_\theta(B)=P(B)$.

Условная ИМ $\mathscr{M}_B$, полученная из $\mathscr{M}$, если стало известно, что событие B произошло, есть выпуклая оболочка (объединение) преобразованных к условным вершин, полученных делением компонент $\mathbf{P}_\theta$ на $P_\theta(B)$ с обнулением компонент $P_\theta(x_i)$, для которых $x_i\notin B$:

$$\mathscr{M}_B=\bigvee_{\theta:\ P_\theta(B)>0}\mathbf{P}^B_\theta/P_\theta(B),$$

где $\mathbf{P}^B{}_\theta$ есть вектор с компонентами $P^B_\theta(x_i)=\begin{cases}P_\theta(x_i), & x_i\in B,\\ 0, & x_i\notin B,\end{cases}$

а объединение производится по тем вершинам, относительно которых вероятность B является ненулевой.

Геометрически получение условной ИМ выглядит следующим образом. Сначала каждая вершина $\mathbf{P}_\theta$ редуцируется к вектору

$\mathbf{P}^B{}_\theta$ обнулением всех компонент $P_\theta(x_i)$, для которых $x_i\notin B$. Эту редукцию можно интерпретировать как проекцию векторов $\mathbf{P}_\theta$ в соответствующее подпространство $\mathscr{R}^r{}_B$ пространства $\mathscr{R}^r$. Далее из начала координат в направлении векторов $\mathbf{P}^B{}_\theta$ проводятся лучи $\lambda P^B{}_\theta$, $\lambda\geqslant 0$, до пересечения с гиперплоскостью $\sum\limits_{x_i\in B}P(x_i)=1$ подпространства $\mathscr{R}^r{}_B$. Пересечение достигается при $\lambda=1/P_\theta(B)$, и точки пересечения $P^B{}_\theta/P_\theta(B)$ дадут векторы условных вероятностей. Иллюстрация сказанного для $\mathscr{X}=\{x_1,x_2,x_3\}$ и $B=\{x_1,x_2\}$ приведена на рис. 1.11. Условной ИМ $\mathscr{M}_B$ здесь соответствует отрезок $[P_{1B},\ P_{3B}]$. Заметим, что число вершин $\mathscr{M}_B$ меньше, чем у $\mathscr{M}$: точка $\mathbf{P}_2$ является вершиной $\mathscr{M}$, но $\mathbf{P}_{2B}$ не есть вершина $\mathscr{M}_B$.

Мы показали, что условные ИМ записываются через вершины, если такую запись допускают безусловные. Если же $\mathscr{M}$ определена своими первичными средними $\overline{M}g$, $g\in\mathscr{G}$, то теоретически можно найти условную ИМ $\mathscr{M}_B$, сводя $\mathscr{M}$ к ее вершинам. Для этого нужно проделать следующую последовательность действий: первичные средние $\overline{M}\mathscr{G}\to$согласованные грани $\mathscr{M}\to$вершины $\mathscr{M}\to$ $\to$вершины условной ИМ$\to$первичные средние $\mathscr{M}_B$. Этот путь весьма долог, поскольку каждая из операций достаточно трудоемка. Но дело даже не в этом, а в том, что для бесконечных пространств $\mathscr{X}$ понятие вершины как вектора вероятностей не имеет смысла, что существенно ограничивает универсальность такой процедуры.

Некоторые свойства условных интервальных моделей. Для условных ИМ $\mathscr{M}_B$ событие B является достоверным $P_B(B)=1$, а B^c — нулевым $\overline{P}_B(B^c)=0$. С учетом этого условные ИМ обладают всеми свойствами ИМ, заданной на $\mathscr{X}$.

Рассмотрим, как будет меняться условная ИМ, если сужать или расширять событие B. Очевидно, в крайних случаях, когда событие B достоверно, т. е. $\underline{P}(B)=1$, условная ИМ совпадает с исходной $\mathscr{M}_B=\mathscr{M}$, а если событие B является невозможным, т. е. $\overline{P}(B)=0$, то условная ИМ будет B-индикаторной: $\mathscr{M}_B=\mathscr{I}_B$. Оказывается, последнее равенство имеет место не обязательно только для невозможных событий.

Свойство 1. *Если каждая из первичных функций $g\in\mathscr{G}$ безусловной модели $\mathscr{M}=\langle\overline{M}\mathscr{G}\rangle$ принимает на B постоянные значения, то условная к ней $\mathscr{M}_B$ будет B-индикаторной: $\mathscr{M}_B=\mathscr{I}_B$.*

В самом деле, в этом случае $\overline{M}_{P*(B)}fB=P_*(B)\max fB$ и свойство непосредственно следует из определения условной ИМ.

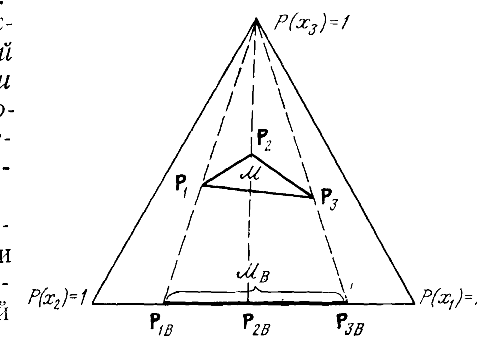


Рис. 1.11. Геометрическая иллюстрация условных моделей

Свойство 2. *Условная ИМ, соответствующая голой мо-*

дели $\mathcal{J}$, будет B-индикаторной $\mathcal{J}_B$, каковым бы условие B ни было.

Свойство 3. *Условная к объединению $\mathcal{M}=\mathcal{M}_1\vee\mathcal{M}_2$ модель равна объединению условных ИМ: $\mathcal{M}_B=\mathcal{M}_{1B}\vee\mathcal{M}_{2B}$.*

Свойство 4. *$\mathcal{M}_1\subset\mathcal{M}_2\Rightarrow\mathcal{M}_{1B}\subset\mathcal{M}_{2B}$ — при переходе к условным сохраняется операция включения.*

Свойство 3 распространяется на объединение произвольного числа моделей. Собственно, это свойство и было положено в основу определения условных моделей, когда от объединения сечений был сделан шаг к объединению условных к ним моделей. Свойство 4 есть прямое следствие 3, так как $\mathcal{M}_1\subset\mathcal{M}_2\Leftrightarrow\mathcal{M}_1\vee\mathcal{M}_2=\mathcal{M}_2$.

Для иллюстрации восстановим наглядную картину, нарисованную на рис. 1.11. Считая $\mathcal{X}$ дискретным, представим себе $\mathcal{M}$ как выпуклое тело в пространство векторов вероятностей, и поместим точечный источник в начало координат. Тело $\mathcal{M}$ при освещении его источником бросает тень на гиперплоскость $\sum_{x\in B}P(x)=P(B)=1$. Эта тень и даст условную ИМ. На основании такого представления получают наглядную интерпретацию свойств 3 и 4. Тень от выпуклого объединения тел будет равна объединению их теней, что иллюстрирует свойство 3. Но вот тень от пересечения тел не будет равна пересечению их теней. Два тела могут не пересекаться, но при освещении точечным источником бросать одинаковую тень на гиперплоскость. Отсюда — следующие два предложения.

Свойство 5. *Пересечению ИМ не будет, в общем, соответствовать пересечение условных ИМ.*

Свойство 6. *Двум различным безусловным ИМ может соответствовать одна и та же условная.*

Например, пусть $B(x)$ есть единственный первичный признак как для модели $\mathcal{M}_1$, так и для $\mathcal{M}_2$, заданных своими точными вероятностями $P_1(B)$, $P_2(B)\neq P_1(B)$. Тогда $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ не пересекаются между собой, но им соответствует одна и та же B-индикаторная условная ИМ $\mathcal{J}_B$.

О восстановлении безусловной модели по условным. Здесь будет обсуждаться вопрос о возможности восстановления $\mathcal{M}$ по набору соответствующих ей условных $\mathcal{M}_{B_i}$, где $\mathcal{B}_\Sigma=\{B_1, \ldots, B_k\}$ есть дробление пространства $\mathcal{X}$ на непересекающиеся события и $\mathcal{X}=\sum B_i$.

Пусть сначала вероятности событий B_i считаются точными для $\mathcal{M}$: $\underline{P}(B_i)=\overline{P}(B_i)=P(B_i)$, $i=1, \ldots, k$. Тогда $\overline{M}_{P(B_i)}fB_i=\overline{M}fB_i$ и на основании этого устанавливается справедливость неравенства

$$\overline{M}f\leqslant\sum\overline{M}fB_i=\sum P(B_i)\,\overline{M}_{B_i}f.$$

Правая часть есть усреднение условных средних $\overline{M}_{B_i}f$ по точному распределению вероятностей $P(B_i)$ событий B_i. Равенство левой и правой частей (соответствующее известной формуле полной вероятности) достигается только тогда, когда верхнее среднее $\overline{M}$ аддитивно на событиях B_i: $\overline{M}\sum fB_i=\sum\overline{M}fB_i$.

Перейдем теперь к более общему случаю, когда вероятности $P(B_i)$ не являются точными. Запишем $\sum P(B_i)\overline{M}_{B_i}f=M[\sum B_i(x)\overline{M}_{B_i}f]$, и заменим символ точного среднего на верхнее по $\mathcal{M}$. Это даст значения

$$\overline{\overline{M}}f=\overline{M}[\sum B_i\overline{M}_{B_i}f],\quad f\in\mathcal{F},$$

определяющие новую ИМ, обозначаемую $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$. Таким образом, *имеет место включение $\overline{\overline{\mathcal{M}}}\supset\mathcal{M}$. А если $\mathcal{M}=\langle\overline{M}\mathcal{G}\rangle$ и все функции набора $\mathcal{G}$ $\mathcal{B}_\Sigma$-измеримы* (т. е. являются конечными линейными комбинациями $B_i(x)$ или их замыканиями), *то $\overline{\overline{\mathcal{M}}}=\mathcal{M}$.*

Выделенный курсивом тезис станет понятным, если отметить, что для вычисления $\overline{\overline{M}}f$ нужно знать как $\overline{M}_{B_i}f$, т. е. условные модели $\mathcal{M}_{B_i}$, так и средние всевозможных линейных комбинаций B_i: $\overline{M}\sum c_iB_i$, что (если взять первичным класс $\mathcal{L}\mathcal{B}_\Sigma$ этих комбинаций) составит $\mathcal{L}\mathcal{B}_\Sigma$-расширение $\mathcal{M}$. Если по условию второго предложения тезиса все $g\in\mathcal{G}$ являются $\mathcal{B}_\Sigma$-измеримыми, то $\mathcal{G}\subset\mathcal{L}\mathcal{B}_\Sigma$ и $\mathcal{L}\mathcal{B}_\Sigma$-расширение совпадает с исходной ИМ $\mathcal{M}$, при этом условные ИМ вырождаются $\mathcal{M}_{B_i}=\mathcal{J}_{B_i}$ в B_i-индикаторные.

Таким образом, сфера действия тезиса о восстановлении сводится к вырожденным условным моделям $\mathcal{M}_{B_i}=\mathcal{J}_{B_i}$.

В общем же случае при переходе к условным моделям происходит утеря данных об $\mathcal{M}$, так что восстановить можно будет не ее, а только более широкую (и следовательно, менее точную) модель $\overline{\overline{\mathcal{M}}}$. Это ограничивает область приложения условных моделей в основном точными распределениями вероятностей.

Абстрактно-условные модели. В предыдущем изложении считалось, что произошло некоторое событие B и исследовалась условная модель $\mathcal{M}_B$. Совершенно формально пока мы заменим индикаторный $B(x)$ на произвольный признак $q(x)$ и будем по тем же формулам определять условную ИМ $\mathcal{M}_q$. Формула (1.15) позволяет это сделать. Как говорилось в начале § 1.1, $q(x)$ при $0\leqslant q(x)\leqslant 1$ может трактоваться как признак нечеткого события q, и тогда $\mathcal{M}_q$ будет условной ИМ, если такое событие произошло.

Пусть $q(x)$ есть функция на $\mathcal{X}$ такая, что $Mq>0$. *Абстрактно-условной*, соответствующей тому, что q произошло, называется модель $\mathcal{M}_q$, определяемая средними

$$\overline{M}_qf=\max_{\underline{M}q\leqslant M_*q\leqslant\overline{M}q}\frac{\overline{M}_{M_*q}(fq)}{M_*q}. \tag{1.17}$$

В числителе правой части (1.17) стоят средние M_*q-сечения $\mathcal{M}$.

Очевидно такое свойство: $\mathcal{M}_{c^+q}=\mathcal{M}_q$ — умножение $q(x)$ на неотрицательный коэффициент c^+ не меняет абстрактно-условной ИМ.

Пусть $p(x)$ есть плотность $\mathcal{M}$ по отношению к $\mathcal{M}^\circ$: $p=\mathcal{M}/\mathcal{M}^\circ$. Тогда соответствующая $\mathcal{M}$ абстрактно-условная модель $\mathcal{M}_q$ при случившемся $q(x)$ будет равна абстрактно-условной модели $\mathcal{M}^\circ_{qp}$ при случившемся $q(x)p(x)$:

$$p=\mathcal{M}/\mathcal{M}^\circ,\ \underline{M}q>0\Rightarrow \mathcal{M}_q=\mathcal{M}^\circ_{qp}.$$

В самом деле по определению плотности $\overline{M}f=\overline{M}^\circ fp$. Записывая (1.17) в развернутой форме, подставим формулу для M_*q-сечения и после несложных преобразований получаем

$$\overline{M}_q f=\max_{\underline{M}q\leqslant M_*q\leqslant \overline{M}q}\frac{\min\limits_c[\overline{M}(f-c)q+cM_*q]}{M_*q}=$$

$$=\max_{\underline{M}^\circ qp\leqslant M_*qp\leqslant \overline{M}^\circ qp}\frac{\min\limits_c[\overline{M}^\circ(f-c)qp+cM_*qp]}{M^*qp}=\overline{M}^\circ_{qp}f,$$

что и требовалось.

Из доказанного утверждения вытекает. *Если $p(x)$ есть плотность $\mathcal{M}$ по отношению к $\mathcal{M}^\circ$, то условная модель $\mathcal{M}_B$, соответствующая случившемуся событию $B\subset\mathcal{X}$, равна абстрактно-условной $\mathcal{M}^\circ_{Bp}$ при случившемся $B(x)p(x)=q(x)$:*

$$p=\mathcal{M}/\mathcal{M}^\circ\Rightarrow \mathcal{M}_B=\mathcal{M}^\circ_{Bp},\quad B\subset\mathcal{X}.$$

При $B=\mathcal{X}$ просто получается $\mathcal{M}=\mathcal{M}^\circ_p$.

Оба последних тезиса, любопытных в математическом аспекте, ищут наглядной интерпретации.

Таким образом, вводимое в настоящем параграфе понятие условной модели без труда распространяется на нечеткие события. Дадим иллюстрацию.

Формула условной вероятности (Байеса) для нечетких событий. Пусть для ИРВ требуется рассчитать вероятность A, если B случилось не достоверно, а с некоторым сомнением, произошло ли оно вообще. Имеем вместо B признак $q=\gamma B+1(1-\gamma)B^c$ (нечеткое событие), где γ есть коэффициент, интерпретируемый как вероятность того, что B произошло. Расчеты по формуле (1.17) дают после ряда вычислений следующее выражение, пригодное при $1/2\leqslant\gamma\leqslant 1$, для вероятности A при свершившемся q:

$$\overline{P}_q(A)=\frac{(1-\gamma)\overline{P}(A)+(2\gamma-1)\overline{P}(AB)}{(1-\gamma)+(2\gamma-1)[\overline{P}(AB)+\underline{P}(A^cB)]}.$$

Как видно, при $\gamma=1$ результат тот же, что и в примере 1.16, а при $\gamma=1/2$ условной вероятностью станет априорная вероятность (безусловная) $\overline{P}_q(A)=\overline{P}(A)$ события A. Это и понятно, так как значение $\gamma=1/2$ эквивалентно $q\equiv 1/2$, что в свою очередь заменимо на $q\equiv 1$ (поскольку умножение q на константу не меняет абстрактно-условной вероятности) и ведет к достоверному событию $B=\mathcal{X}$. Формула для условной вероятности при $0\leqslant\gamma\leqslant 1/2$

(соответствующей тому, что с преобладающей верой произошло даже B^c, а не B) получается из приведенной заменой B на B^c и γ — на $1-\gamma$, а для нижней условной вероятности — переменой нижних вероятностей с верхними и наоборот.

1.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматриваются случайные явления, в описании которых прямо или косвенно может быть указано множество взаимно исключающих друг друга элементарных исходов, образующих пространство элементарных событий. Функции на этом пространстве называются признаками. Средние статистические значения признаков есть пределы средних арифметических результатов независимых повторов явления в одинаковых условиях и могут быть точными (для устойчивых явлений) и интервальными (для неустойчивых, неопределенных). Средние в интервальном понимании существуют в очень широкой области признаков, куда входят обязательно все ограниченные.

Интервальная модель есть совокупность нижних и верхних средних в области их существования, связанных между собой аксиомами § 1.1. Аксиомы согласуют средние между собой.

Любая ИМ (§ 1.2) формируется первичным набором $\mathcal{G}$ признаков, элементы которого предопределят тип модели, и непротиворечивым (корректным) заданием на $\mathcal{G}$ первичных средних, конкретизирующих ее вид. Ключевой является теорема 1.1, согласно которой средние с первичных признаков однозначно продолжаются с согласованием на все признаки, мажорируемые первичными, образуя область существования ИМ. Если среди первичных признаков имеются неограниченные, то они породят неограниченные признаки в области существования. Дополнительное расширение области существования может производиться предельным переходом (1.4) от усеченных сверху и снизу функций подобно тому, как понимается интеграл от неограниченных функций.

Интервальные модели отличаются друг от друга разными наборами первичных признаков и разными первичными средними, а в итоге — разными значениями средних в области их существования. По включениям этих значений можно судить, какая из ИМ более широкая, а какая менее (§ 1.3). Чем шире ИМ, тем меньше полезных данных о явлении в ней содержатся. Самой широкой среди всех является голая ИМ, соответствующая абсолютному отсутствию данных (или полнейшей неустойчивости явления). Расширение ИМ служит рабочим инструментом ее упрощений.

Через средние в § 1.3 определяются операции пересечения ИМ как добавление данных к уже имеющимся и объединения как рассеяние данных, рост неопределенности. Геометрически ИМ есть многогранники, в которых первичные признаки и их средние определяют соответственно направления граней и их положения. Пересечение многогранников есть их общая часть, поэтому будет снова многогранником, а объединение полагается расширить до его выпуклой оболочки, чтобы получилась ИМ.

Частным случаем ИМ, когда первичными взяты вероятности событий, являются интервальные распределения вероятностей, описанные в § 1.4. Первичный набор событий ИРВ произволен как по количеству, так и топологии. Если это полукольцо (например, отрезки числовой прямой) и на нем заданы точные вероятности, то они однозначно продолжаются, оставаясь точными, на алгебру событий (суммы отрезков), а их согласованность равносильна аддитивности, что ведет к конечно-аддитивным распределениям вероятностей. Расширение первичного набора до счетной алгебры и задание вероятностей сознательно счетно-аддитивными ведет к сужению распределений вероятностей до счетно-аддитивных.

Обобщением указанных типов распределений вероятностей являются конечно- и счетно-аддитивные ИРВ, у которых при той же первичной системе событий вероятности заданы интервальными. Еще одним типом ИРВ является интервальная функция распределения вероятностей, первичной для которой является набор вкладывающихся событий; представима как семейство точных функций распределения, причем непрерывные из них есть конечно-аддитивные распределения вероятностей, а разрывные соответствуют их группам.

Любое семейство распределений вероятностей (конечно-аддитивных или счетно) суть некоторая ИМ. С другой стороны, любая ИМ с интервальными средними представима как объединение ее простых составляющих с точными средними (теорема 1.3 § 1.5). В частности, это может быть семейство конечно-аддитивных распределений вероятностей. Но не счетно-аддитивных как слишком специальных, чтобы стать универсальным «строительным материалом» для всех ИМ (исключая дискретные пространства элементарных событий).

Иная ИМ может приобрести наглядность, а подчас и физическую осмысленность правильным подбором ее представления через некоторые стандартные модели. Это может быть сделано удачным выбором вида соответствующего функционального преобразования. Еще один специальный способ состоит в записи средних одной ИМ через другую (стандартную) с помощью формальной плотности, понимаемой шире классической плотности вероятностей (§ 1.5).

При наличии достоверно свершившегося события ИМ трансформируется в условную пересчетом ее средних (§ 1.6). Формула (1.15) пересчета весьма сложна (кроме случая точных вероятностей). Она приложима к нечетким событиям. Переход к условным моделям сопровождается обычно расширением. Вернуться от условных к исходной модели, ничего не потеряв, можно лишь в редких исключениях, поэтому условные модели не занимают сколь-либо значительного места в интервальных методах.